Řešená cvičení z lineární algebry II

Karel Král

9. dubna 2018

Tento text není určen k šíření. Všechny chyby v tomto textu jsou samozřejmě záměrné. Reportujte je prosím na adresu `kralka@iuuk.mff.cuni`....

Obsah

1 Cvičení

Já jsem Karel, pro kterou přednášku cvičíme, jazyk cvičení, zápočet, jak se učit...

0. Kdo co potřebuje opakovat z minulého semestru. Řešení soustav rovnic, násobení matic, souřadnice, lineární zobrazení... (někdy brzo nejspíš bude opakovací písemka).

   Řešení: Viz skripta Milana Hladíka.

   Co chcete slyšet? Jak jste na tom s programováním?

1. Mějme bázi B danou vektory:

   $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^T, (1/2, -1/2, -1/2, 1/2)^T, (-1/2, 1/2, -1/2, 1/2)^T, (-1/2, -1/2, 1/2, 1/2)^T$

   Najděte matici přechodu od kanonické báze k bázi B. Najděte souřadnice vektoru $(3, 1, 4, 1)^T$ v bázi B. Čeho si všimnete na matici ${}_B[id]_K$?

2. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, skalární součin je binární operace $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{R}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje:

   (a) $\langle x \mid x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane jen pro $x = \vec{0}$

   (b) $\langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$

   (c) $\langle \alpha x \mid y \rangle = \alpha \langle x \mid y \rangle$

   (d) $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$ (respektive $\langle x \mid y \rangle = \overline{\langle y \mid x \rangle}$ pro komplexní čísla).

   Řekneme, že vektory u, v jsou na sebe *kolmé*, pokud $\langle x \mid y \rangle = 0$.

   Norma daná skalárním součinem je $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$. Intuitivně norma určuje délku vektoru. Připomeňme, že norma lze definovat i o něco obecnějším způsobem, ale normy dané skalárním součinem jsou velice užitečné.

   Geometrická interpretace standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$ je pak $\langle x \mid y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\varphi)$, kde φ je úhel mezi vektory x, y (porovnejte s definicí kolmosti).

   Navíc víme, že když máme ortonormální vektory, pak jsou lineárně nezávislé.

3. Ukažte, že následující jsou skalární součiny:

   (a) (Standardní skal. souč.) V $\mathbb{R}^n$ definujeme $\langle x \mid y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

   (b) V prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$ spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ definujeme $\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$.

4. Spočítejte standardní skalární součin vektorů $(1, 2, 3)^T, (0, 0, 1)^T, (1, -2, 1)^T$. Které z nich jsou navzájem kolmé? Jaká je délka prvního vektoru? Jak daleko jsou od sebe první a třetí vektor?

   Řešení: $\langle (1, 2, 3)^T | (0, 0, 1)^T \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$ – nejsou kolmé, $\langle (1, 2, 3)^T | (1, -2, 1)^T \rangle = 1 - 4 + 3 = 0$ tedy jsou kolmé, $\langle (0, 0, 1)^T | (1, -2, 1)^T \rangle = 1$ tedy nejsou kolmé.

   Délka prvního vektoru $\|(1, 2, 3)^T\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

   První a třetí vektor jsou od sebe $\|(1, 2, 3)^T - (1, -2, 1)^T\| = \|(0, 4, 2)^T\| = \sqrt{20}$.

5. Označme řádky matice A jako vektory $v_1, \ldots, v_m$ a sloupce matice B vektory $w_1, \ldots, w_p$. Čím jsou tvořeny jednotlivé prvky matice AB?

   Řešení: $(AB)_{i,j} = \langle v_i | w_j \rangle$

   Dokažte, že řádkový prostor a kernel jsou navzájem kolmé.

   Řešení: Kernel je vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy rovnic, tedy pro každý řádek musí platit, že po dosazení dostaneme nulu.

6. Pro skalární součin definovaný $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ ukažte, že jsou funkce $3x^2-1$ a $5x^3-3x$ navzájem kolmé.

   Řešení: $\int_{-1}^{1}(3x^2-1)(5x^3-3x)\,dx = \int_{-1}^{1} 15x^5-14x^3+3x\,dx = [\frac{15}{6}x^6+\frac{7}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2]_{-1}^{1} = 0$

7. O symetrické reálné matici A, pro kterou platí $x^TAx > 0$ pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ řekneme, že je pozitivně definitní. Definujme skalární součin $\langle x|y\rangle = x^TAy$, dokažte, že toto je opravdu skalární součin právě když A je pozitivně definitní.

   Řešení: Přímo ověření definice.

   Pro daný skalární součin odvoďte obecný způsob, jak najít pozitivně definitní matici A, která ho určuje.

   Řešení: Podívejte se, co se děje v součinech dvojic vektorů z kanonické báze.

   Dokažte, že součet dvou pozitivně definitních matic je pozitivně definitní matice. Ukažte, že kladný násobek pozitivně definitní matice je pozitivně definitní matice.

   Řešení: Ověření definice.

8. Dokažte, že všechny vektory $v \in \mathbb{R}^3$, které splňují $\langle (1,0,-3)^T|v\rangle = 0$ tvoří vektorový prostor. Jinak řečeno $\left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 | \langle (1,0,-3)^T|v\rangle = 0\right\}$ tvoří vektorový prostor.

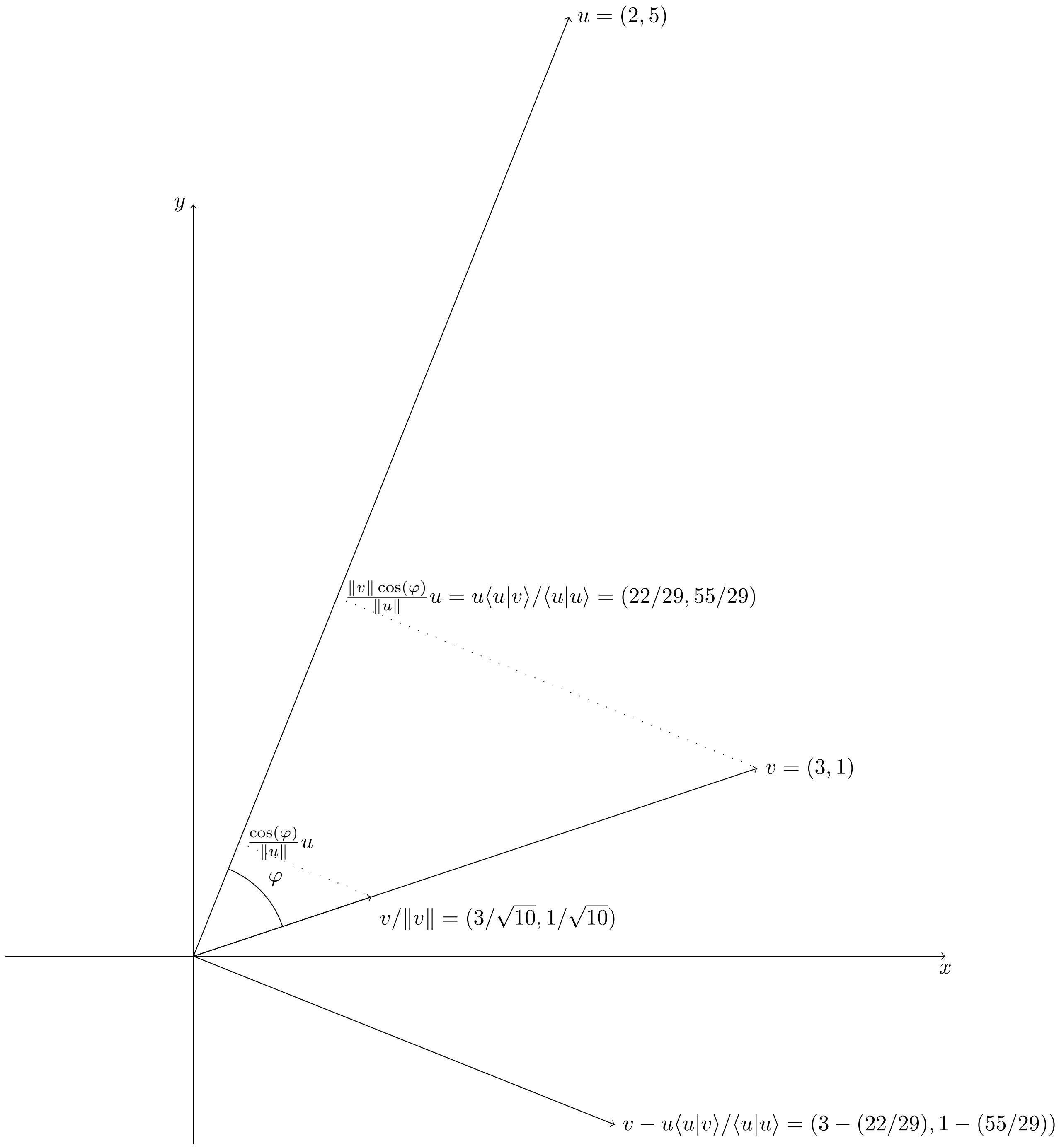
   Řešení: Ověření definice.

   Dokažte, že všechny vektory z $\mathbb{R}^3$, které splňují $\langle (1,0,-3)^T|v\rangle = 2$ tvoří afinní prostor (a to rovinu).

   Řešení: Ověření definice.

9. Mějme dva vektory $(2,5)^T, (3,1)^T$, jaký násobek druhého vektoru musíme odečíst od prvního, aby byl kolmý na druhý? Jaký násobek prvního vektoru musíme odečíst od druhého aby byl kolmý na první?

   Řešení: Řešme druhou část, ilustrace viz obrázek 1. Délka vektoru $u = (2,5)$ je $\|(2,5)\| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$. Délka vektoru $v = (3,1)$ je $\|(3,1)\| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$. Vektor se stejným směrem jako v a jednotkovou délkou je $v/\|v\| = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$. Skalární součin $\langle u|v\rangle = 6+5 = 11$. Vzpomeňme si na středoškolskou goniometrii, vidíme že pokud by vektor v měl jednotkovou délku, promítl by se na $\frac{\cos(\varphi)}{\|u\|}u$. Využitím podobnosti trojúhelníků a vztahu $\langle x|y\rangle = \|x\|\|y\|\cos\varphi$ dostaneme první krok Gram-Schmidtovy ortogonalizace, tedy vyjádření kolmého vektoru $v - u\langle u|v\rangle/\langle u|u\rangle = (3-(22/29), 1-(55/29))$. Ověřme ještě ortogonalitu: $\langle (2,5)|(3-(22/29), 1-(55/29))\rangle = 6-44/29+5-275/29 = 0$.



Obrázek 1: Počítání kolmé projekce vektoru v na vektor u.

Ještě jednodušší bude čistě algebraický postup. Od vektoru v chceme odečíst nějaký c-násobek vektoru u, tak aby $v - cu$ bylo kolmé na u (a hledáme dané c). Chceme tedy

$$\langle v - cu \mid u \rangle = 0 \quad (1)$$
$$\langle v \mid u \rangle - c\langle u \mid u \rangle = 0 \quad (2)$$
$$\langle v \mid u \rangle = c\langle u \mid u \rangle \quad (3)$$

$$\frac{\langle v \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle} = c \tag{4}$$

Rovnice (2) je jen rozepsáním podle definice skalárního součinu. V rovnici (4) nedělíme nulou v důsledku toho, že vektor u nemá nulovou délku.

10. Dokažte, že norma definovaná skalárním součinem ($\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tedy $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

    Řešení: Rozepište levou stranu podle definice a použijte linearitu skalárního součinu.

    Může být norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

    Řešení: Ne, použijte předchozí část cvičení.

Pro zvídavé Dokažte, že v rovině neexistují čtyři body, tak že vzdálenosti mezi nimi jsou celá lichá čísla (mohou a nemusí být všechna stejná).

Řešení: 33 miniatures by prof. Matoušek
`https://kam.mff.cuni.cz/~matousek/stml-53-matousek-1.pdf`

2 Cvičení

Příklady 6 a dál z předchozího cvičení.

3 Cvičení

1. Vůči standardnímu skalárnímu součinu vyberte z následujících tří vektorů kolmé dvojice: $(1,2,3)$, $(5,2,-3)$ a $(-2,-1,-4)$.

   Kterou z následujících vlastností má relace kolmosti: Reflexivita, ireflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita?

   Řešení: $(1,2,3) \perp (5,2,-3)$, $(5,2,-3) \perp (-2,-1,-4)$, ale $(1,2,3) \not\perp (-2,-1,-4)$.

   Relace kolmosti tudíž není tranzitivní (ani reflexivní, pouze symetrická).

2. Určete podle Gramm-Schmidtova předpisu ortonormální bázi řádkových prostorů následujících matic:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

   Řešení: Odečtením projekcí spočteme nejprve kolmý vektor $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i \mid z_j\rangle z_j$; a ten pak normalizujeme $z_i = \frac{y_i}{||y_i||}$.

   Normalizujeme $y_1 = x_1$: $||y_1|| = 2$ a odtud $z_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

   $\langle x_2 \mid z_1\rangle = 5$ a proto $y_2 = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})^T$.

   Normalizujeme y_2: $||y_2|| = 3$ a dostaneme $z_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.

   $\langle x_3 \mid z_1\rangle = 5$, $\langle x_3 \mid z_2\rangle = -1$ a tedy $y_3 = (-1,-1,1,1)^T$.

   Normalizujeme y_3: $||y_3|| = 2$ a máme $z_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

   Vyjde nám: $Z = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

3. Spočítejte vzdálenost bodu $(1,2,0,1)^T$ od roviny generované vektory $(1,1,0,0)^T$, $(2,-1,0,0)^T$.

   Řešení: Vektory roviny ortonormalizujeme a dostaneme $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)^T$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0)^T$ a pak už jen odečteme od zadaného vektoru jeho kolmou projekci a tím dostaneme $(0,0,0,1)^T$ jehož délka je jedna. Postupovali jsme dle Gramm-Schmidtovy ortonormalizace (přesvědčete se, které vektory vám vydá a se kterými počítáte během ní).

   Příklad šel řešit i metodou kouknu a vidím, protože vektory, které generují rovinu generují celou rovinu danou prvními dvěma souřadnicemi a nic jiného.

4. Určete ortonormální bázi (pomocí G-S) řádkového prostoru následující matice a tu rozšiřte na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

5. Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $Ax = b$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

   $b = (10, 5, 13, 9)^T$

   Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé. O kolik je vaše řešení špatně (tj. spočítejte $b - Ax$)? (Metoda nejmenších čtverců se často používá, když jsou chyby hodně malé – ale s takovými se na cvičení na papíře špatně počítá). Vyjdou stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

6. Dokažte, že reálná norma definovaná skalárním součinem ($\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tedy $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

   Řešení: Rozepište levou stranu podle definice a použijte linearitu skalárního součinu.

   Může být norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

   Řešení: Ne, použijte předchozí část cvičení.

7. Ukažte, že sloupce Hadamardovy matice $H_m \in \mathbb{R}^{2^m \times 2^m}$ definované jako

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix},$$

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix},$$

   jsou ortonormální.

Pro zvídavé Kontrola maticového násobení: máte program, který tvrdí, že umí násobit matice rychle. Stačí skontrolovat $Cx = A(Bx)$ kde C je výstup programu po násobení AB a x je náhodný $\{0,1\}$ vektor správné délky. Dokažte, že pak pokud je C špatně, pak s pravděpodobností aspoň polovina rovnost $Cx = ABx$ neplatí.

4 Cvičení

1. Určete bázi ortogonálního doplňku řádkového prostoru matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

   Řešení: Jedná se jen a pouze o kernel matice A (skalární součiny jsou nula – řešíme homogenní soustavu rovnic).

2. Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $Ax = b$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $b = (10, 5, 13, 9)^T$

   Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé. O kolik je vaše řešení špatně (tj. spočítejte $b - Ax$)? (Metoda nejmenších čtverců se často používá, když jsou chyby hodně malé – ale s takovými se na cvičení na papíře špatně počítá). Vyjdou stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

3. Povídání o determinantech – geometrická intuice a proč je tam znaménko permutace. Opakování definice a jak se počítají.

   Počítání determinantů matic 2×2 a vliv ekvivalentních úprav na ně. Geometrická intuice v rovině.

4. Spočítejte derminanty následujících reálných matic:

   $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je -9.

   $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je 30.

   $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je 2.

   $\begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Nejpve použijte řádkové úpravy. Determinant matice je 1001.

5 Cvičení

1. Určete bázi ortogonálního doplňku řádkového prostoru matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

   Řešení: Jedná se jen a pouze o kernel matice A (skalární součiny jsou nula – řešíme homogenní soustavu rovnic).

2. Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $Ax = b$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $b = (10, 5, 13, 9)^T$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé. O kolik je vaše řešení špatně (tj. spočítejte $b - Ax$)? (Metoda nejmenších čtverců se často používá, když jsou chyby hodně malé – ale s takovými se na cvičení na papíře špatně počítá). Vyjdou stejná řešení jako řešení soustavy $A^TAx = A^Tb$?

3. Povídání o determinantech – geometrická intuice a proč je tam znaménko permutace. Opakování definice a jak se počítají.

   Počítání determinantů matic 2×2 a vliv ekvivalentních úprav na ně. Geometrická intuice v rovině.

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je -4.

   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je -3.

   $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je -16.

   $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je 15.

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je 80.

4. Může být součet ortonormálních matic ortonormální matice? Jaký je determinant ortonormální matice?

5. Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následujícím maticím nad tělesem reálných čísel i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *Řešení:*

   Adjungovaná matice: $(\mathrm{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j}|A^{j,i}|$, kde $A^{j,i}$ je matice vzniklá odstraněním j-tého řádku a i-tého sloupce z matice A (všimněte si prohození indexů).

   Inverze se spočítá: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.

   Nad $\mathbb{R}$

   $|A| = -1$, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   Nad $\mathbb{Z}_5$

   $|A| = -1 = 4$, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *Řešení:*

Nad $\mathbb{R}$

$$|A| = 4,\ \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Nad $\mathbb{Z}_5$

$$|A| = 4\ ,\ \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:*

Nad $\mathbb{R}$

$$|A| = -5,\ \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/5 & 3/5 & -7/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Nad $\mathbb{Z}_5$

$|A| = 0$, tudíž A je singulární nad $\mathbb{Z}_5$ a A^{-1} neexistuje, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Spočítejte derminanty následujících matic nad $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$