

Já jsem Karel, pro kterou přednášku cvičíme, jazyk cvičení, zápočet, jak se učít...

0. Kdo co potřebuje opakovat z minulého semestru. Řešení soustav rovnic, násobení matic, souřadnice, lineární zobrazení... (někdy brzo nejspíš bude opakovací písemka).

Co chcete slyšet? Jak jste na tom s programováním?

1. Mějme bázi B danou vektory:

$$(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^T, (1/2, -1/2, -1/2, 1/2)^T, (-1/2, 1/2, -1/2, 1/2)^T, (-1/2, -1/2, 1/2, 1/2)^T$$

Najděte matici přechodu od kanonické báze k bázi B . Najděte souřadnice vektoru $(3, 1, 4, 1)^T$ v bázi B . Čeho si všimnete na matici ${}_B[id]_K$?

2. Buď V vektorový prostor nad \mathbb{R} , skalární součin je binární operace $\langle \cdot | \cdot \rangle: V^2 \rightarrow \mathbb{R}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje:

(a) $\langle x | x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane jen pro $x = \vec{0}$

(b) $\langle x + y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$

(c) $\langle \alpha x | y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle$

(d) $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$ (respektive $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$ pro komplexní čísla).

Řekneme, že vektory u, v jsou na sebe *kolmé*, pokud $\langle x | y \rangle = 0$.

Norma daná skalárním součinem je $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$. Intuitivně norma určuje délku vektoru. Připomeňme, že norma lze definovat i o něco obecnějším způsobem, ale normy dané skalárním součinem jsou velice užitečné.

Geometrická interpretace standardního skalárního součinu v \mathbb{R}^n je pak $\langle x | y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\varphi)$, kde φ je úhel mezi vektory x, y (porovnejte s definicí kolmosti).

Navíc víme, že když máme ortonormální vektory, pak jsou lineárně nezávislé.

3. Ukažte, že následující jsou skalární součiny:

(a) (Standardní skal. souč.) V \mathbb{R}^n definujeme $\langle x | y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

(b) V prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$ spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ definujeme $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

4. Spočítejte standardní skalární součin vektorů $(1, 2, 3)^T, (0, 0, 1)^T, (1, -2, 1)^T$. Které z nich jsou navzájem kolmé? Jaká je délka prvního vektoru? Jak daleko jsou od sebe první a třetí vektor?

5. Označme řádky matice A jako vektory v_1, \dots, v_m a sloupce matice B vektory w_1, \dots, w_p . Čím jsou tvořeny jednotlivé prvky matice AB ?

Dokažte, že řádkový prostor a kernel jsou navzájem kolmé.

6. Pro skalární součin definovaný $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ ukažte, že jsou funkce $3x^2 - 1$ a $5x^3 - 3x$ navzájem kolmé.

7. O symetrické matici reálné A , pro kterou platí $x^T A x > 0$ pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ řekneme, že je pozitivně definitní. Definujme skalární součin $\langle x | y \rangle = x^T A y$, dokažte, že toto je opravdu skalární součin právě když A je pozitivně definitní.

Pro daný skalární součin odvoďte obecný způsob, jak najít pozitivně definitní matici A , která ho určuje.

Dokažte, že součet dvou pozitivně definitních matic je pozitivně definitní matice. Ukažte, že kladný násobek pozitivně definitní matice je pozitivně definitní matice.

8. Dokažte, že všechny vektory $v \in \mathbb{R}^3$, které splňují $\langle (1, 0, -3)^T | v \rangle = 0$ tvoří vektorový prostor. Jinak řečeno $\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 | \langle (1, 0, -3)^T | v \rangle = 0\}$ tvoří vektorový prostor.
Dokažte, že všechny vektory z \mathbb{R}^3 , které splňují $\langle (1, 0, -3)^T | v \rangle = 2$ tvoří afinní prostor (a to rovinu).
9. Mějme dva vektory $(2, 5)^T, (3, 1)^T$, co musíme odečíst od prvního, aby byl kolmý na druhý? Co musíme odečíst od druhého aby byl kolmý na první?
10. Dokažte, že norma definovaná skalárním součinem ($\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tedy $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
Může být norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

Pro zvědavé Dokažte, že v rovině neexistují čtyři body, tak že vzdálenosti mezi nimi jsou celá lichá čísla (mohou a nemusí být všechna stejná).