Additional homework – Linear Algebra II
Náhradní domácí úkoly – Lineární algebra II

Karel Král

May 29, 2018

Send your solutions in a pdf file to `kralka@iuuk(dot)mff(dot)cuni(dot)cz` or give me a handwritten version in person.

Prefer the tasks you had problems with in tests.

Do not forget to show at least some calculations and the algorithm you are using should be clear!

Svá řešení mi pošlete v pdf mailem na `kralka@iuuk(tecka)mff(tecka)cuni(tecka)cz` nebo mi je dejte papírově.

Preferujte úlohy, se kterými jste měli problémy v testech.

Nezapomeňte uvést aspoň nějaké výpočty a postup, který používáte musí být jasný!

Contents

1 Gramm-Schmidt

Compute the Gram-Schmidt orthonormalisation of the following sets of vectors (use the standard dot product unless specified otherwise):
Proveďte Gram-Schmidtovu ortonormalizaci na následujících vektorech (použijte standardní skalární součin, pokud není řečeno jinak):

[1 point = 1 bod]

$$(1,1,0)^T,$$
$$(2,2,3)^T$$

[1 point = 1 bod]

$$(0,0,0,0,0,0,0,3)^T,$$
$$(0,0,0,0,0,0,4,6)^T,$$
$$(0,0,0,0,0,5,7,3)^T,$$
$$(0,0,0,0,9,5,4,7)^T,$$
$$(0,0,0,10,9,5,9,3)^T,$$
$$(0,0,7,10,7,5,4,2)^T,$$
$$(0,4,7,10,2,5,4,9)^T,$$
$$(1,4,4,10,1,5,4,3)^T$$

[1 point = 1 bod] Use the dot product defined as $\langle f \mid g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.
Použijte skalární součin definovaný jako: $\langle f \mid g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

$$2\cos(2x),$$
$$\sin(2x) + 13\cos(2x),$$
$$\sin(3x),$$
$$\cos(4x) + \sin(3x)$$

[1 point = 1 bod] Show that any finite set of orthonormal vectors is linearly independent.

Ukažte, že každá konečná množina navzájem ortonormálních vektorů je lineárně nezávislá.

2 Determinants

[1 point = 1 bod] Use adjugate matrix (`https://en.wikipedia.org/wiki/Adjugate_matrix`) to compute the invers of the following matrix over the finite field $\mathbb{Z}_{13}$:
Pomocí adjugované matice (`https://cs.wikipedia.org/wiki/Adjungovan%C3%A1_matice`) spočítejte inverzní matici nad tělesem $\mathbb{Z}_{13}$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

[1 point = 1 bod] Use adjugate matrix (`https://en.wikipedia.org/wiki/Adjugate_matrix`) to compute the invers of the following matrix over the finite field $\mathbb{Z}_{13}$:
Pomocí adjugované matice (`https://cs.wikipedia.org/wiki/Adjungovan%C3%A1_matice`) spočítejte inverzní matici nad tělesem $\mathbb{Z}_{13}$:
$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

[1 point = 1 bod] Compute the determinant over $\mathbb{Z}_7$:
Spočítejte determinant následující matice nad $\mathbb{Z}_7$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[1 point = 1 bod] What is the volume of a unit ball transformed by the linear map given by the following matrix:
Jaký je objem jednotkové koule po zobrazení lineárním zobrazením daném následující maticí:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

3 Eigenvectors – Vlastní vektory

[1 point = 1 bod] Determine geometric and algebraic multiplicities of all eigenvalues. The matrix is real ($\mathbb{R}$) and has integral eigenvalues with absolute value at most 4.
Určete algebraickou a geometrickou násobnost vlastních čísel. Matice je reálná a má celočíselná vlastní čísla, která mají absolutní hodnotu nejvýš 4.
$$\begin{pmatrix} -\frac{43}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{65}{3} & \frac{32}{3} & -5 \\ -\frac{25}{6} & \frac{5}{3} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

[1 point = 1 bod] Determine if the following matrix is diagonalisable (that is similar to a diagonal matrix). The matrix is real ($\mathbb{R}$) and has integral eigenvalues with absolute value at most 2.
Určete, jestli je následující matice diagonalizovatelná (tj. podobná diagonální matici). Matice je reálná a má celočíselná vlastní čísla, která mají absolutní hodnotu nejvýš 2.
$$\begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{17}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

[1 point = 1 bod] Determine if the following matrix is diagonalisable (that is similar to a diagonal matrix). The matrix is real ($\mathbb{R}$) and has integral eigenvalues with absolute value at most 2.
Určete, jestli je následující matice diagonalizovatelná (tj. podobná diagonální matici). Matice je reálná a má celočíselná vlastní čísla, která mají absolutní hodnotu nejvýš 2.
$$\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{20}{3} & \frac{5}{3} & 4 \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

[1 point = 1 bod] Let G be a d-regular connected graph and A be its adjacency matrix. What is the largest eigenvalue of A? Can you tell if G is bipartite only by looking at the spectrum of A?
Nechť G je d-regulární souvislý graf a A je jeho matice sousednosti. Co je její největší vlastní číslo A? Můžete určit, jestli je G bipartitní jen ze spektra A?

4 Positive Definite Matrices – Pozitivně definitní matice

[1 point = 1 bod] Compute Cholesky decomposition of the following matrix (over the real numbers $\mathbb{R}$):
Spočítejte Choleského dekompozici následující matice (nad reálnými čísly $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} 64 & 64 & 40 & 24 & 8 & 40 & 8 \\ 64 & 113 & 54 & 66 & 64 & 89 & 57 \\ 40 & 54 & 45 & 47 & 53 & 71 & 35 \\ 24 & 66 & 47 & 74 & 105 & 101 & 73 \\ 8 & 64 & 53 & 105 & 242 & 195 & 133 \\ 40 & 89 & 71 & 101 & 195 & 255 & 132 \\ 8 & 57 & 35 & 73 & 133 & 132 & 99 \end{pmatrix}$$

[1 point = 1 bod] Using all methods you know determine whether the following matrix is positive definite (over the real numbers $\mathbb{R}$):
You should use Cholesky decomposition, the recursive formula, determinants of square submatrices (the top left ones) and Gaussian elimination.
Ověřte (pomocí všech metod, které znáte), jestli je následující matice pozitivně definitní (nad reálnými čísly $\mathbb{R}$):
Použijte Choleského dekompozici, rekurzivní ověření, determinanty čtvercových podmatic (těch v levých horních rozích) a Gaussovu eliminaci.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

[1 point = 1 bod] Using all methods you know determine whether the following matrix is positive definite (over the real numbers $\mathbb{R}$):
You should use Cholesky decomposition, the recursive formula, determinants of square submatrices (the top left ones) and Gaussian elimination.
Ověřte (pomocí všech metod, které znáte), jestli je následující matice pozitivně definitní (nad reálnými čísly $\mathbb{R}$):
Použijte Choleského dekompozici, rekurzivní ověření, determinanty čtvercových podmatic (těch v levých horních rozích) a Gaussovu eliminaci.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 6 \\ 4 & 13 & 11 & 18 \\ 8 & 11 & 18 & 20 \\ 6 & 18 & 20 & 57 \end{pmatrix}$$

[1 point = 1 bod] Using Cholesky decomposition compute the solution of the following system of linear equations $Ax = b$ (over the real numbers $\mathbb{R}$):
Použitím Choleského rozkladu spočítejte řešení soustavy rovnic $Ax = b$ (nad reálnými čísly $\mathbb{R}$):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 10 & 10 \\ 4 & 3 & 6 & 10 & 17 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$