1. O symetrické reálné matici A, pro kterou platí $x^T Ax > 0$ pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ řekneme, že je pozitivně definitní. Definujme skalární součin $\langle x|y\rangle = x^T Ay$, dokažte, že toto je opravdu skalární součin právě když A je pozitivně definitní.

   Pro daný skalární součin odvoďte obecný způsob, jak najít pozitivně definitní matici A, která ho určuje.

   Dokažte, že součet dvou pozitivně definitních matic je pozitivně definitní matice. Ukažte, že kladný násobek pozitivně definitní matice je pozitivně definitní matice.

   Pozitivně (semi-)definitní matice mimo jiné hrají velice důležitou roli v matematické optimalizaci (takzvané semidefinitní programování).

2. Spočítejte vzdálenost bodu $(1, 2, 0, 1)^T$ od roviny generované vektory $(1, 1, 0, 0)^T$, $(2, -1, 0, 0)^T$.

3. Vůči standardnímu skalárnímu součinu vyberte z následujících tří vektorů kolmé dvojice: $(1, 2, 3)$, $(5, 2, -3)$ a $(-2, -1, -4)$.

   Kterou z následujících vlastností má relace kolmosti: Reflexivita, ireflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita?

4. Určete ortonormální bázi (pomocí G-S) řádkového prostoru následující matice a tu rozšiřte na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

5. Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $Ax = b$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $b = (10, 5, 13, 9)^T$

   Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé. O kolik je vaše řešení špatně (tj. spočítejte $b - Ax$)? (Metoda nejmenších čtverců se často používá, když jsou chyby hodně malé – ale s takovými se na cvičení na papíře špatně počítá). Vyjdou stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

6. Dokažte, že reálná norma definovaná skalárním součinem ($\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tedy $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

   Může být norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

Pro zvídavé Kontrola maticového násobení: máte program, který tvrdí, že umí násobit matice rychle. Stačí skontrolovat $Cx = A(Bx)$ kde C je výstup programu po násobení AB a x je náhodný $\{0, 1\}$ vektor správné délky. Dokažte, že pak pokud je C špatně, pak s pravděpodobností aspoň polovina rovnost $Cx = ABx$ neplatí.

(2 body) Určete vzdálenost bodu $A = (5, 3, 5, 3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8, -1, 1, -2)^T$ a $C = (4, -2, 2, -1)^T$.

(4 body) Definujme sloupce matice B jako sloupce matice A po Gramm-Schmidtově ortonormalizaci. Pak spočítejte pomocí metody nejmenších čtverců přibližné řešení soustavy $Bx = b$ pro: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $b = (10, 5, 13, 9)^T$. O kolik je vaše řešení chybné (tj. spočítejte $b - Bx$)? Vyjdou stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?