1. Ukažte, že následující jsou skalární součiny:
   (a) (Standardní skal. souč.) V $\mathbb{R}^n$ definujeme $\langle x \mid y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
   (b) V prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$ spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ definujeme $\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.
   (c) Stopa součinu matic: $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$, kde A, B jsou matice stejné velikosti a tr značí stopu, tj. součet čísel na diagonále.
2. O symetrické matici reálné A, pro kterou platí $x^T Ax > 0$ pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ řekneme, že je pozitivně definitní. Definujme skalární součin $\langle x|y\rangle = x^T Ay$, dokažte, že toto je opravdu skalární součin právě když A je pozitivně definitní.

   Pro daný skalární součin odvoďte obecný způsob, jak najít pozitivně definitní matici A, která ho určuje.

   Dokažte, že součet dvou pozitivně definitních matic je pozitivně definitní matice. Ukažte, že kladný násobek pozitivně definitní matice je pozitivně definitní matice.

   Pozitivně (semi-)definitní matice mimo jiné hrají velice důležitou roli v matematické optimalizaci (takzvané semidefinitní programování).
3. Určete podle Gramm-Schmidtova předpisu ortonormální bázi řádkových prostorů následujících matic:
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
4. Mějme dva vektory $(2,5)^T, (3,1)^T$, co musíme odečíst od prvního, aby byl kolmý na druhý? Co musíme odečíst od druhého aby byl kolmý na první?
5. Dokažte, že reálná norma definovaná skalárním součinem ($\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tedy $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

   Může být norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

Errata QR kódy, Reed-Solomonovy kódy a souvislost s rychlou Fourierovou transformací, Fourierovou transformací v analýze a jejich využití.

6. Ukažte, že sloupce Hadamardovy matice $H_m \in \mathbb{R}^{2^m \times 2^m}$ definované jako

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix},$$

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix},$$

   jsou ortonormální.

Pro zvídavé Kontrola maticového násobení: máte program, který tvrdí, že umí násobit matice rychle. Stačí skontrolovat $Cx = A(Bx)$ kde C je výstup programu po násobení AB a x je náhodný $\{0,1\}$ vektor správné délky. Dokažte, že pak pokud je C špatně, pak s pravděpodobností aspoň polovina rovnost $Cx = ABx$ neplatí.