Řešená cvičení z lineární algebry I

Karel Král

18. prosince 2016

Tento text není určen k šíření. Všechny chyby v tomto textu jsou samozřejmě záměrné. Reportujte je prosím na adresu `kralka@kam.mff.cuni`....

Obsah

1 Cvičení

1. Spočítejte $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Nadále budeme psát $(a,b)^T$ místo $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

   Řešení: Vektory sčítáme po jednotlivých prvcích. Výsledek: $\begin{pmatrix}1-4(-1)+2\cdot 1\\3-4\cdot 3+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}$.

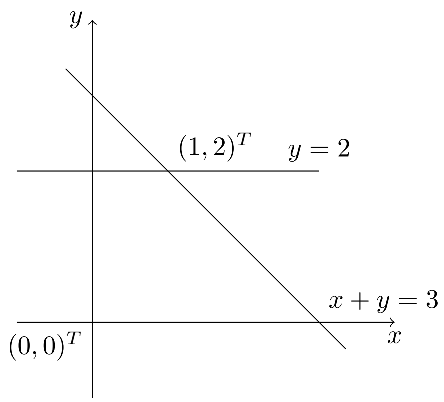
2. Co je řešením rovnice $2y-1=3$? Co je řešením, pokud přidáme rovnici $x+y=3$? Napište maticový zápis (druhou rovnici napište na první řádek), nakreslete jako průsečík přímek a jako součet vektorů.

   Řešení: První rovnici upravíme na $y=2$ (k oběma stranám přičteme jedna a pak obě strany vydělíme dvěma). Dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Jejím řešením je očividně bod $(1,2)^T$ (ten získáme takzvanou zpětnou substitucí).

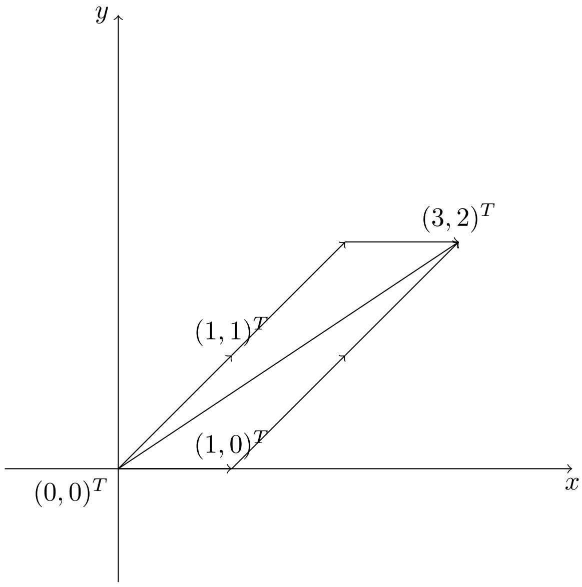
Řádkový pohled dává průnik nadrovin, které jsou ve dvou rozměrech přímky. Neformální intuice je, že v jedné rovnici si můžeme zvolit všechny proměnné až na jednu, kterou dopočítáme, dimenze množiny bodů, které danou rovnici splňují tedy bude o jedna menší než dimenze celého prostoru.



Sloupcový pohled: chceme najít řešení vyjádřené jako součet sloupců matice

$$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Sloupcové vektory matice nakreslíme do roviny a stejně tak vektor pravých stran.



3. Popište průnik nadrovin $2w+7x-y+3z=5$, $2w-y+3z=3$ a $2w-y=1$ (vše ve čtyřech rozměrech, tedy v $\mathbb{R}^4$). Co je to geometricky (přímka, bod nebo prázdná množina)? Jaký je průnik, pokud přidáme $2w=-1$? Najděte čtvrtou rovnici tak aby průnikem byla prázdná množina.

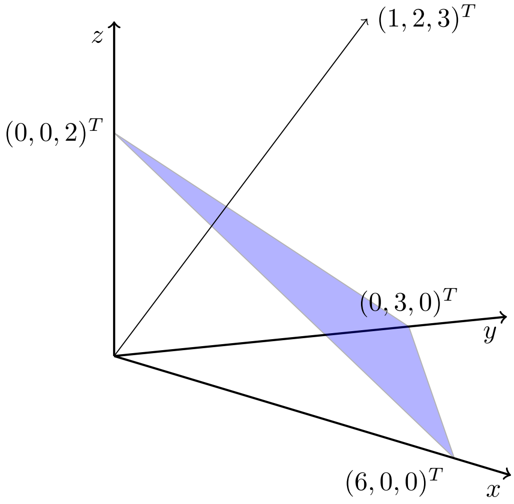
   Řešení: Tohle nenakreslím, ale můžeme řešit jako rovnice s řešením $x=2/7, y=2w-1, z=2/3$, které můžeme zapsat jako: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2/7 \\ -1 \\ 2/3 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, což je přímka (honosně řečeno afinní prostor).

   Přidáním rovnice $2w=-1$ dostaneme jediný bod (dosadíme $w=-1/2$ do vyjádření přímky).

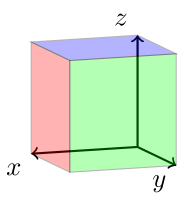
   Pokud bychom chtěli přidat rovnici, tak aby neexistovalo řešení, můžeme přidat jakoukoliv rovnici, která neobsahuje přímku z prvního odstavce. Nejjednodušší je $2w+7x-y+3z=0$.

4. Pro každou polohu tří rovin v prostoru (všechny rovnoběžné, průnik jeden bod, průnik přímka, …) napište soustavu, která má takový tvar. Co znamená rovnoběžnost rovin pro soustavu rovnic? (Hint: počet řešení a dva řádky vyjadřující dvě rovnoběžné roviny.)

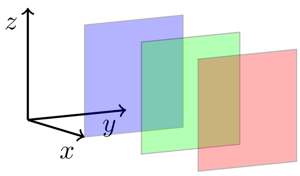
   Řešení: Rovnice $1x+2y+3z=6$ určuje rovinu s normálovým vektorem $(1,2,3)^T$ (ten je na ni kolmý). Tato rovina prochází například body $(6,0,0)^T$, $(0,3,0)^T$ a $(0,0,2)^T$, stačilo za dvě souřadnice cokoliv dosadit a dopočítat třetí souřadnici.



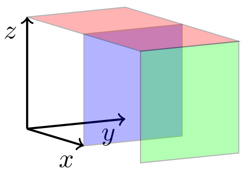
Obrázek 1: Rovina se svým normálovým vektorem.



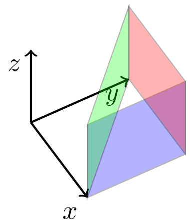
Obrázek 2: Tři roviny $x = 1$ (červeně), $y = 1$ (zeleně), $z = 1$ (modře). Všechny se protínají v jednom bodě.



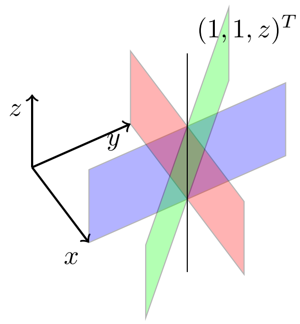
Obrázek 3: Tři roviny $x = 1$ (modře), $x = 2$ (zeleně), $x = 3$ (červeně). Všechny rovnoběžné, tedy nemají společný průnik.



Obrázek 4: Tři roviny $x = 1$ (modře), $x = 2$ (zeleně), $z = 1$ (červeně). Dvě rovnoběžné, tedy nemají společný průnik.



Obrázek 5: Tři roviny $x = 1$ (modře), $y = 1$ (červeně), $x + y = 1$ (zeleně). Žádné rovnoběžné, ale nemají společný průnik.



Obrázek 6: Tři roviny $x = 1$ (modře), $y = 1$ (červeně), $x + y = 2$ (zeleně). Žádné rovnoběžné, společný průnik je přímka.

5. Určete středovou rovnici kružnice procházející body $(3,3)^T, (1,5)^T, (5,5)^T$ Pro připomenutí kružnice se středem $S = (s_1, s_2)^T$ a poloměrem $r \in [0, \infty)$ má rovnici $(x-s_1)^2+(y-s_2)^2 = r^2$.

   Řešení: Napišme si soustavu rovnic:

$$(3 - s_1)^2 + (3 - s_2)^2 = r^2$$
$$(1 - s_1)^2 + (5 - s_2)^2 = r^2$$
$$(5 - s_1)^2 + (5 - s_2)^2 = r^2$$

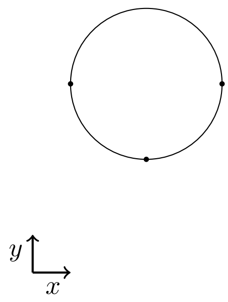
   Po roznásobení:

$$s_1^2 - 6s_1 + 9 + s_2^2 - 6s_2 + 9 = r^2 \tag{1}$$
$$s_1^2 - 2s_1 + 1 + s_2^2 - 10s_2 + 25 = r^2 \tag{2}$$
$$s_1^2 - 10s_1 + 25 + s_2^2 - 10s_2 + 25 = r^2 \tag{3}$$

   Od první i od druhé rovnice odečteme třetí rovnici:

$$4s_1 - 16 + 4s_2 - 16 = 0$$
$$8s_1 - 24 = 0$$

   Výsledkem tedy je: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 2^2$.



Obrázek 7: Kružnice se středem v $(3,5)^T$ a poloměrem dva.

6. Pod jakou podmínkou jsou body $(0,y_1)^T,(1,y_2)^T,(2,y_3)^T$ na jedné přímce? Pod jakou podmínkou jsou body $(0,0)^T,(y_1,y_2)^T,(y_3,y_4)^T$ na jedné přímce?

   Řešení: Napišme si parametrickou rovnici přímky procházející body $(0,y_1)^T,(1,y_2)^T$, ta je $(0,y_1)^T + t(1,y_2-y_1)^T$ pro $t \in \mathbb{R}$. Aby třetí bod $(2,y_3)^T$ ležel na této přímce, musí $t=2$ a tedy $y_3 = 2(y_2-y_1)$.

   Obdobně řešíme i druhý případ, parametrická rovnice je $t(y_1,y_2)^T$ a třetí bod tedy splňuje $y_3 = ty_1$ a zároveň $y_4 = ty_2$ (pro tu samou hodnotu t).

   Tento příklad je řešitelný obdobně i pomocí obecné rovnice.

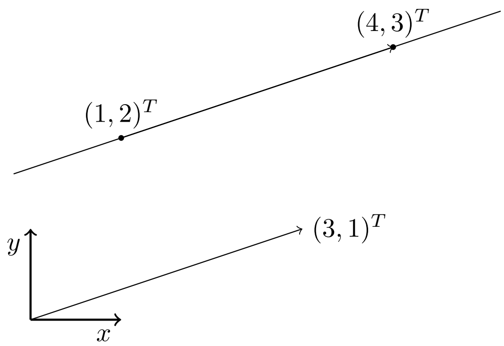
7. (a) Napište parametrické vyjádření $S = \{\vec{u} + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ přímky jdoucí body $(1,2)^T,(4,3)^T$.

   Řešení: Parametrické vyjádření se skládá ze "startovního" vektoru u a směrového vektoru v, "podél kterého se můžeme pohybovat ze startu."

   Startovní vektor můžeme volit například vektor $(1,2)^T$ a směrový získáme jako druhý vektor minus tento první $(4,3)^T - (1,2)^T = (3,1)^T$. Parametrické vyjádření tedy je $\{(1,2)^T + t(3,1)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$.

   Platí, že místo teď vypočteného směrového vektoru můžeme vzít jeho jakýkoliv nenulový násobek, což změní jen hodnotu parametru t.

   Všimněte si, že volně zaměňuji body z prostoru $\mathbb{R}^2$ za vektory. Pokud zvolíme soustavu souřadnic, pak se na bod můžeme dívat jako na vektor jeho souřadnic. Naproti tomu vás čeká mnohem obecnější definice vektorů. Vektorem bude mimo jiné i funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



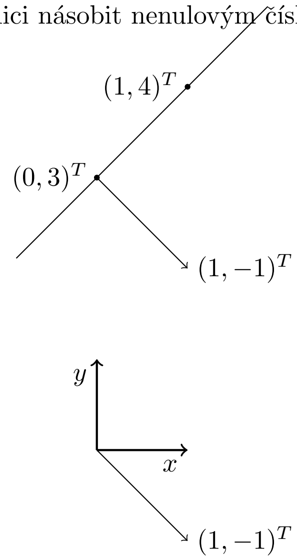
Obrázek 8: Přímka, vyznačený směrový vektor.

   (b) Napište obecnou rovnici $ax+by+c=0$ přímky jdoucí body $(0,3)^T,(1,4)^T$. Nakreslete vektor $(a,b)^T$, nepřijde vám kolmý na tu přímku?

Řešení: Zde řešíme soustavu rovnic, případně určíme směrový vektor a k němu kolmý vektor zvaný normálový (pro vektor $(a, b)^T$ je kolmým vektorem vektor $(-b, a)^T$ i vektor $(b, -a)^T$, to že jsou opravdu kolmé bude předmětem některého příštího cvičení).

Směrový vektor je $(1, 1)^T$, normálový tedy bude $(1, -1)^T$. Normálový vektor udává koeficienty a, b v rovnici $ax + by = c$. Dosazením dopočteme koeficient c. Výsledek je $x - y = -3$.

Opět můžeme celou rovnici násobit nenulovým číslem a přímka zůstane nezměněna.



Obrázek 9: Přímka, vyznačený normálový vektor.

(c) Převeďte obecnou rovnici $3x - 2y + 1 = 0$ na parametrické vyjádření.

Řešení: Můžeme spočítat dva body ležící na této přímce a postupovat jako v předešlém případě. Druhá možnost je spočítat směrový vektor $(2, 3)^T$ (kolmý na normálový vektor $(3, 2)^T$) a dopočítat startovní bod například dosazením nuly za x a získáním $(0, 1/2)^T$.

(d) Převeďte parametrické vyjádření $S = \left\{(1, 2)^T + t(-1, 2)^T \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ na obecnou rovnici.

Řešení: Můžeme spočítat dva body ležící na této přímce a postupovat jako v předešlém případě. Druhá možnost je spočítat normálový vektor $(2, 1)^T$ (kolmý na směrový vektor $(-1, 2)^T$) a dopočítat $c = -4$ pro počáteční bod $(2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + c = 0)$.

Jsou daná vyjádření jednoznačná? *Řešení:* Nejsou. Směrový vektor můžeme vynásobit libovolnou nenulovou konstantou. Navíc jako počáteční bod můžeme volit libovolný bod na dané přímce. Obdobně celou obecnou rovnici můžeme vynásobit libovolnou nenulovou konstantou.

Najděte obě vyjádření roviny procházející body $(1, 2, 0)^T, (-1, 0, 1)^T, (0, 3, 1)^T$, pokuste se je na sebe navzájem převést. Co by se stalo, kdyby všechny tři body byly na jedné přímce?

Řešení: TODO

2 Cvičení

1. Počítejte řešení následujících soustav rovnic:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+\ x_3 &= \ \ 1\\ 2x_1+\ x_2+3x_3 &= 11\\ 5x_1+5x_2+2x_3 &= \ \ 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5 &= 2\\ 2x_1+2x_2+4x_3-\ x_4+3x_5 &= 2\\ x_1+\ x_2+3x_3-2x_4+3x_5 &= 1\\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5 &= 1 \end{aligned}$$

2. Nalezněte aspoň jedno netriviální řešení soustavy $Ax = 0$. Proveďte zkoušku i s případnými parametry. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$
3. Násobte matice napsané na tabuli.
4. Invertujte následující matice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Příklady pro početně zdatné:

---

5. Vymyslete, jak reprezentovat elementární úpravy násobením matic. Umíte rozložit matici na součin dolní a horní trojúhelníkové matice?
6. Vymyslete, jak rychle mocnit číslo. Například spočítejte (na papíře), kolik je 3^{16} s použitím co nejméně násobení. Co by bylo třeba upravit, kdybychom měli exponent, který není mocninou dvojky?
7. Vymyslete, jak násobením matic reprezentovat počítání Fibonacciho čísel. Fibonacciho čísla jsou daná jako $F_1 = F_2 = 1$ a pak $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$. Jak bychom to mohli použít k jejich rychlému počítání? (Nápověda: obdobný postup jako v předchozím příkladě.)
8. Pokud soustava rovnic má řešení, tak ho umíme najít a umíme ověřit, že řešení je řešením (zkouška). Tedy jedno takové řešení je “svědek” toho, že soustava je řešitelná. Vymyslete “svědka” toho, že soustava žádné řešení nemá. (Poznámka: se “svědky” neboli certifikáty něčeho se v informatice velice často setkáváme, například v teorii složitosti.)

3 Cvičení

1. Počítejte řešení následujících soustav rovnic:

$$\begin{aligned} -x_1+\ x_2-3x_3+4x_4 &= \ \ 1\\ 2x_1-\ x_2+4x_3-7x_4 &= \ \ 0\\ -x_1-\ x_2+\ x_3+2x_4 &= -3\\ -x_1+2x_2-5x_3+5x_4 &= \ \ 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 \quad\quad + x_4 &= \ \ 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= \ \ 2 \\ x_1 \quad - x_3 \quad\quad &= \ \ 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2. Vymyslete, jak reprezentovat elementární úpravy násobením matic. Umíte rozložit matici na součin dolní a horní trojúhelníkové matice?
3. Vymyslete, jak rychle mocnit číslo. Například spočítejte (na papíře), kolik je 3^{16} s použitím co nejméně násobení. Co by bylo třeba upravit, kdybychom měli exponent, který není mocninou dvojky?
4. Vymyslete, jak násobením matic reprezentovat počítání Fibonacciho čísel. Fibonacciho čísla jsou daná jako $F_1 = F_2 = 1$ a pak $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$. Jak bychom to mohli použít k jejich rychlému počítání? (Nápověda: obdobný postup jako v předchozím příkladě.)
5. Invertujte následující matice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. Naučte se počítat v $GF(p)$ (také značeno $\mathbb{Z}_p$) pro p prvočíslo.

Příklady pro početně zdatné:

---

7. Pokud soustava rovnic má řešení, tak ho umíme najít a umíme ověřit, že řešení je řešením (zkouška). Tedy jedno takové řešení je "svědek" toho, že soustava je řešitelná. Vymyslete "svědka" toho, že soustava žádné řešení nemá. (Poznámka: se "svědky" neboli certifikáty něčeho se v informatice velice často setkáváme, například v teorii složitosti.)

4 Cvičení

1. Definujte grupu. Důležitou třídou grup jsou komutativní grupy, ty si dokonce vysloužily vlastní jméno a říkáme jim Abelovy (abelovské). Připomeňte i definici komutativity.

   Řešení: Operace je komutativní, pokud pro všechna a, b platí $a \circ b = b \circ a$.

   Grupa je dvojice $(G, \circ)$, kde G je množina a $\circ$ je binární operace na G (tedy $\circ \colon G \times G \to G$) splňující:

   (A) Operace $\circ$ je asociativní (tedy $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ pro všechna $a, b, c \in G$).

   (E) Existuje prvek e takový, že pro všechna $a \in G$ platí $a \circ e = e \circ a = a$ (tento prvek nazýváme jednotkový nebo také neutrální).

(I) Pro každé $a \in G$ existuje prvek $b \in G$ takový, že $a \circ b = b \circ a = e$, kde e je jednotkový prvek. Takovému b říkáme inverzní prvek a značíme ho a^{-1}.

2. Je daná operace binární operací (a) na množině $\mathbb{R}$, (b) na množině kladných přirozených čísel $\mathbb{N}^+$?

   (a) sčítání,

   Řešení: Sčítání je na obou ($a + b \in \mathbb{R}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ i pro $a, b \in \mathbb{N}^+$ máme $a + b \in \mathbb{N}^+$).

   (b) odčítání,

   Řešení: Odčítání je na reálných číslech, ale ne na přirozených ($3 - 8 = -5 \notin \mathbb{N}^+$).

   (c) dělení,

   Řešení: Dělení není na reálných číslech, protože nemůžeme dělit nulou. Není ani na kladných přirozených číslech ($5/3 \notin \mathbb{N}^+$).

   (d) násobení

   Řešení: Násobení je na obou (obdobně jako sčítání).

3. Najděte příklady binární operace na vhodné množině, která

   (a) je asociativní i komutativní,

   Řešení: Například celá čísla se sčítáním.

   (b) je asociativní, ale není komutativní,

   Řešení: Maticové násobení na množině všech matic z $\mathbb{R}^{n\times n}$.

   (c) není ani komutativní, ani asociativní,

   Řešení: Například celá čísla s odčítáním $2 = 5-3 \neq 3-5 = -2$. Navíc $1 = (5-1)-3 \neq 5 - (1 - 3) = 7$.

   (d) je komutativní, ale není asociativní.

   Řešení: Uvažme reálná čísla a operaci $a \circ b = ab - (a + b)$, ta není asociativní neboť $-1 = 1 \circ (2 \circ 3) \neq (1 \circ 2) \circ 3 = -5$.

4. Pro kladné celé číslo n a dvě celá čísla a, b řekneme, že a, b jsou kongruentní modulo n psáno $a \equiv b \pmod{n}$, právě když n dělí $a - b$ (tedy $a - b$ je celočíselným násobkem n). Ověřte, jestli následující jsou grupy, případně Abelovy grupy:

   (a) Regulární matice $\mathbb{R}^{12\times 12}$ s operací $\circ$ maticové násobení.

   (b) $(\mathbb{N}, \circ)$, kde $a \circ b = \max\{a, b\}$.

   (c) Binární čísla dlouhá n číslic (2^n) a operace je xor (exkluzivní or, tedy $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ a $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$. Pro více bitová čísla počítáme po jednotlivých složkách, tedy například $1100 \oplus 0111 = 1011$.

   (d) Nosná množina jsou dvojice reálných čísel (píšeme $\mathbb{R}^2$) a binární operace je dána $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$.

   (e) Otočení čtverce.

   (f) Otočení a symetrie čtverce.

   (g) Otočení pravidelného čtyřstěnu.

   (h) Oblíbené hlavolamy často tvoří grupu (Rubikova kostka, Loydova patnáctka).

   (i) Sčítání celých čísel modulo 6.

(j) Násobení nenulových čísel modulo 6.

(k) Násobení nenulových čísel modulo 5.

5. Dokažte, že v každé grupě existuje právě jeden jednotkový prvek.

   Řešení: Předpokládejme, že e, f jsou jednotkové prvky. Z definice jednotkového prvku máme $e = e \circ f = f$, tedy spor s předpokladem.

6. Dokažte, že v každé grupě pro každé a existuje právě jeden inverzní prvek.

   Řešení: Z definice grupy existuje aspoň jeden inverzní prvek. Předpokládejme, že pro dané $a \in G$ existují dva inverzní prvky b, c. Pak můžeme psát $b = b \circ a \circ c = c$ neboť $a \circ c = b \circ a = e$, kde e je jednotkový prvek a využíváme asociativitu binární operace v grupě.

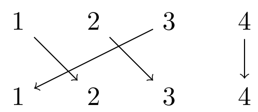
7. Dokažte, že v každé grupě je možné krátit zprava, tedy z $a \circ c = b \circ c$ plyne $a = b$.

   Řešení: Pro prvek $c \in G$ existuje inverzní prvek $c^{-1} \in G$. Vynásobíme obě strany rovnice tímto inverzním prvkem zprava (tím rovnost zůstane zachována) a máme $a \circ c \circ c^{-1} = b \circ c \circ c^{-1}$ z asociativity binární operace v grupě máme $a \circ e = b \circ e$ pro jednotkový prvek e, tedy $a = b$.

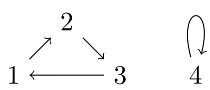
8. Dalším velice důležitým příkladem jsou grupy permutací značené S_n (kterým se říká symetrické grupy). Kde prvky jsou permutace na množině $\{1, \ldots, n\}$ a operace $\circ$ je skládání permutací. Dokažte, že toto je grupa.

   Připomeňme, že permutace je bijekce $\pi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Permutaci můžeme zapsat jako tabulku hodnot, graficky znázornit pomocí šipek které ukazují který prvek se zobrazí na který. Navíc permutaci můžeme zapsat i jako permutační matici, která má v každém řádku i každém sloupci právě jednu jedničku a jinde nuly.

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



Obrázek 10: Bipartitní znázornění permutace.



Obrázek 11: Znázornění permutace pomocí orientovaného grafu.

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Kolik je různých permutací na n prvkové množině?

   Definujme množinu inverzí permutace π jako $I(\pi) = \{(i, j) \mid i < j \text{ a zároveň } \pi(i) > \pi(j)\}$. Znaménko permutace se definuje jako $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{|I(\pi)|}$. Znaménko lze definovat i jinými ekvivalentními způsoby.

   Jaké je znaménko identity? Transpozice je permutace, která zamění dva prvky. Jaké je znaménko transpozice? Lze každou permutaci dostat jako složení transpozic?

Tvoří permutace znaménka 1 grupu? Co permutace znaménka -1?

Cyklus permutace je orientovaný cyklus v orientovaném grafu $(\{1,\ldots,n\},\{(i,j) \mid j=\pi(i)\})$ (máme povolené smyčky).

Která permutace má nejvíc cyklů? Existuje permutace, která má pouze jeden cyklus?

Permutaci můžeme zapsat pomocí jejích cyklů tak, že seřadíme její cykly sestupně podle jejich minimálních prvků a zapíšeme je za sebe tak, že začneme vždy minimálním prvkem cyklu. Tedy naše ukázková permutace je zapsaná takto: 4123, což odpovídá cyklům (4)(123). To je ovšem jiná permutace, než permutace 4132, která odpovídá cyklům (4)(132).

5 Cvičení

1. Pro kladné celé číslo n a dvě celá čísla a,b řekneme, že a,b jsou kongruentní modulo n psáno $a \equiv b \pmod n$, právě když n dělí $a-b$ (tedy $a-b$ je celočíselným násobkem n). Ověřte, jestli následující jsou grupy, případně Abelovy grupy:
   (a) Regulární matice $\mathbb{R}^{12\times 12}$ s operací $\circ$ maticové násobení.
   (b) $(\mathbb{N},\circ)$, kde $a\circ b=\max\{a,b\}$.
   (c) Násobení nenulových čísel modulo 6.
2. Dokažte, že v každé grupě pro každé a existuje právě jeden inverzní prvek.

   Řešení: Z definice grupy existuje aspoň jeden inverzní prvek. Předpokládejme, že pro dané $a\in G$ existují dva inverzní prvky b,c. Pak můžeme psát $b=b\circ a\circ c=c$ neboť $a\circ c=b\circ a=e$, kde e je jednotkový prvek a využíváme asociativitu binární operace v grupě.
3. Dokažte, že v každé grupě je možné krátit zprava, tedy z $a\circ c=b\circ c$ plyne $a=b$.

   Řešení: Pro prvek $c\in G$ existuje inverzní prvek $c^{-1}\in G$. Vynásobíme obě strany rovnice tímto inverzním prvkem zprava (tím rovnost zůstane zachována) a máme $a\circ c\circ c^{-1}=b\circ c\circ c^{-1}$ z asociativity binární operace v grupě máme $a\circ e=b\circ e$ pro jednotkový prvek e, tedy $a=b$.
4. Vlastnosti permutací.
5. Vlastnosti těles.
6. Konečná tělesa. Počítání s maticemi nad konečným tělesem.
7. Opakování komplexních čísel.

6 Cvičení

Bez vytištěného pdf

7 Cvičení

1. Ukažte, že následující není vektorový prostor: $V=\mathbb{R}^2$ a sčítání vektorů je definováno jako $(a,b)+(c,d)=(a+d,b+c)$. Násobení skalárem je definováno po složkách, tedy $c(a,b)=(ca,cb)$.

   Řešení: Neplatí distributivita při sčítání dvou násobků skalárem. Například

$$(3,6)=(1+2)\cdot(1,2)\neq 1\cdot(1,2)+2\cdot(1,2)=(1,2)+(2,4)=(5,4)$$

(vektor je psaný jako řádkový).

2. Dokažte z definice, že ve vektorovém prostoru platí $(-1)\vec{v} = \overrightarrow{-v}$.

   Řešení: Z distributivity a z dokázaného na přednášce $\vec{v} + \overrightarrow{-v} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{v} = (1-1)\vec{v} = 1\vec{v} + (-1)\vec{v} = \vec{v} + (-1)\vec{v}$. Navíc už v grupě máme jednoznačnost inverzu. Tady jsme použili, že $0\vec{v} = \vec{0}$, což jsme už dokázali z axiomů.

3. Určete množinu lineárních kombinací vektorů $\{(1,2),(-1,3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

   Řešení: Je to celá reálná rovina. Snadno to ověříme tak, že soustava rovnic $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x = b$ má řešení pro každé $b \in \mathbb{R}^2$. Vektor x je příslušná lineární kombinace zadaných vektorů – sloupců matice.

4. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ připomeňte, co je kernel, *Řešení:* Kernel neboli jádro je množina všech řešení homogenní soustavy

   $$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \right\}.$$

   sloupcový prostor, *Řešení:* Sloupcový prostor neboli obraz je prostor všech pravých stran, pro která existuje řešení, ekvivalentně je to lineární obal sloupců matice A

   $$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = \vec{b} \right\} = \{ A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n \}.$$

   řádkový prostor, *Řešení:* Lineární obal řádků matice A. Také se nazývá levý obraz, protože je roven $\mathrm{Im}(A^T)$.

   co tu ještě chybí? *Řešení:* Levé jádro, které je $\mathrm{Ker}(A^T)$.

   Je průnik dvou lineárních podprostorů lineární podprostor? *Řešení:* Ano, uzavřenost na skalární násobek a součet platí v obou pro $\vec{u}, \vec{v} \in U \cap V$ máme $a\vec{u} \in U$ a $a\vec{u} \in V$, navíc $\vec{u} + \vec{v} \in U$, $\vec{u} + \vec{v} \in V$, takže oboje je i v průniku.

   Jak to souvisí se základními pohledy na soustavu rovnic? *Řešení:* Řádkový pohled odpovídá průniku podprostorů (jaké dimenze?) a sloupcový pohled odpovídá sloupcovému prostoru.

5. Doplňte množinu na bázi vektorového prostoru:
   (a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ v prostoru $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$.
   (b) $M = \left\{ -x^2, x + x^2, x^3 - 1 \right\}$ v prostoru reálných polynomů stupně nejvýš tři.
   (c) $M = \left\{ (1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T \right\}$ v prostoru $V = \mathbb{R}^4$.

6. Jak určíte souřadnice vůči bázi? Určete souřadnice $[f]_X$ vektoru $f(x) = x^4 - 1$ vůči bázi $X = \left\{ x^4 + x^3, x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1, x^4 + 1 \right\}$ reálných polynomů stupně nejvýš čtyři.

7. Vyzkoušejte, zda řádkový a sloupcový prostor mají stejnou dimenzi. Jak s tím souvisí dimenze kernelu? $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

8 Cvičení

1. Jak určíte souřadnice vůči bázi? Určete souřadnice $[f]_X$ vektoru $f(x) = x^4 - 1$ vůči bázi $X = \left\{ x^4 + x^3, x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1, x^4 + 1 \right\}$ reálných polynomů stupně nejvýš čtyři.

Řešení: Řešíme soustavu rovnic $a_1(x^4+x^3)+a_2(x^3+x^2)+a_3(x^2+x)+a_4(x+1)+a_5(x^4+1) = x^4-1$, tu si rozepíšeme pro jednotlivé mocniny x na soustavu pěti rovnic o pěti neznámých.

2. Vyzkoušejte, zda řádkový a sloupcový prostor mají stejnou dimenzi. Jak s tím souvisí dimenze kernelu? $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

   Řešení: Dimenze řádkového prostoru, jinak řečeno rank je stejná jako dimenze sloupcového prostoru. V tomto případě vyjde 3. Dimenze kernelu je počet sloupců - rank matice v tomto případě má dimenzi 1 a generuje ho například vektor $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{67}{191} & -\frac{122}{191} & -\frac{18}{191} \end{pmatrix}^T$.

3. Mějme dvě báze prostoru $\mathbb{Z}_5^4$: $A = \{(1,2,0,1)^T, (4,1,3,1)^T, (3,1,3,4)^T, (2,0,2,2)^T\}$ a $B = \{(1,2,3,1)^T, (4,4,1,1)^T, (2,0,2,1)^T, (3,1,4,0)^T\}$. Jak souřadnice vektoru v jedné bázi převedeme na souřadnice toho samého vektoru v jiné bázi?

4. Dokažte, že lineární zobrazení je plně určeno tím, kam zobrazíme bázové vektory. Tedy pokud máme zadáno $f(b_i) = b_i'$ pro $b_1, \ldots, b_n$ bázi, pak $f(v) = f(\sum_{i=1}^n a_i b_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(b_i) = \sum_{i=1}^n a_i b_i'$.

5. Jakému lineárnímu zobrazení odpovídá zobrazení $x \mapsto Ax$?

6. Jak souvisí lineární zobrazení se souřadnicemi a převody mezi bázemi...?

7. Pracujeme nad $\mathbb{Z}_5^4$. Pro báze A, B dané sloupci matic $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Řešení: Připomeňme si základní pojmy: Nechť $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (tedy vektory a_i jsou sloupce matice A) je báze. Nechť vektor x má vyjádření $x = \sum_{i=0}^n \alpha_i a_i$, pak souřadnicemi vektoru x vzhledem k bázi A rozumíme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a vektor souřadnic značíme $[x]_A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$.

   Například tedy, pokud bychom měli kanonickou bázi (značme $K = I_n$), pak $[x]_K = x$.

   Matice přechodu: mějme A, B dvě báze jako v zadání, pak maticí přechodu od A k B rozumíme matici ${}_B[\,\mathrm{id}]_A$, po které chceme, aby pro každý vektor x platilo: $[x]_B = {}_B[\,\mathrm{id}]_A[x]_A$. Tedy ze souřadnic v bázi A nám udělá souřadnice v bázi B.

   (a) Určete matici přechodu od souřadnic báze A ke kanonické bázi.

   Řešení: Násobení $A[x]_A$ odpovídá lineární kombinaci sloupců A kde koeficienty jsou jednotlivé souřadnice. Tedy ${}_K[\,\mathrm{id}]_A = A$.

   (b) Určete matici přechodu od souřadnic kanonické báze k souřadnicím báze B.

   Řešení: Z předchozího víme, že $[x]_K = B[x]_B$. Užijeme krásné věty lineární algebry, která říká, že dimenze řádkového a sloupcového prostoru jsou stejné. Lidsky řečeno: když jsou nezávislé sloupce, jsou nezávislé i řádky a tedy matice je regulární. Tudíž existuje inverzní matice B^{-1}, kterou násobíme zleva a dostaneme: $B^{-1}[x]_K = [x]_B$. Vidíme tedy, že ${}_B[\,\mathrm{id}]_K = B^{-1}$.

   (c) Určete matici přechodu od souřadnic báze A k souřadnicím báze B.

   Řešení: Už umíme převédst souřadnice od báze A ke kanonické a od kanonické k bázi B prostým složením těchto zobrazení dostaneme požadovanou matici přechodu. Tedy ${}_B[\,\mathrm{id}]_A = {}_B[\,\mathrm{id}]_K {}_K[\,\mathrm{id}]_A = B^{-1}A$.

9 Cvičení

1. Pracujte v $\mathbb{Z}_7^3$. Vyberte z množiny $X = \{(1,2,3)^T, (0,1,3)^T, (6,4,1)^T\}$ lineárně nezávislou podmnožinu a tu potom doplňte na bázi celého prostoru $\mathbb{Z}_7^3$.

2. Pracujeme nad $\mathbb{Z}_5^4$. Pro báze A, B dané sloupci matic $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Řešení: Připomeňme si základní pojmy: Nechť $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (tedy vektory a_i jsou sloupce matice A) je báze. Nechť vektor x má vyjádření $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i$, pak souřadnicemi vektoru x vzhledem k bázi A rozumíme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a vektor souřadnic značíme $[x]_A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$.

   Například tedy, pokud bychom měli kanonickou bázi (značme $K = I_n$), pak $[x]_K = x$.

   Matice přechodu: mějme A, B dvě báze jako v zadání, pak maticí přechodu od A k B rozumíme matici ${}_B[\,\mathrm{id}]_A$, po které chceme, aby pro každý vektor x platilo: $[x]_B = {}_B[\,\mathrm{id}]_A [x]_A$. Tedy ze souřadnic v bázi A nám udělá souřadnice v bázi B.

   (a) Určete matici přechodu od souřadnic báze A ke kanonické bázi.

   Řešení: Násobení $A[x]_A$ odpovídá lineární kombinaci sloupců A kde koeficienty jsou jednotlivé souřadnice. Tedy ${}_K[\,\mathrm{id}]_A = A$.

   (b) Určete matici přechodu od souřadnic kanonické báze k souřadnicím báze B.

   Řešení: Z předchozího víme, že $[x]_K = B[x]_B$. Užijeme krásné věty lineární algebry, která říká, že dimenze řádkového a sloupcového prostoru jsou stejné. Lidsky řečeno: když jsou nezávislé sloupce, jsou nezávislé i řádky a tedy matice je regulární. Tudíž existuje inverzní matice B^{-1}, kterou násobíme zleva a dostaneme: $B^{-1}[x]_K = [x]_B$. Vidíme tedy, že ${}_B[\,\mathrm{id}]_K = B^{-1}$.

   Výpočet inverzu k matici B:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{Přičteme 3 krát řádek 1 k řádku 2.}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Přičteme 2 krát řádek 1 k řádku 3.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Přičteme 4 krát řádek 1 k řádku 4.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Přičteme řádek 2 k řádku 3.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Přičteme 3 krát řádek 2 k řádku 4.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vynásobíme řádek 3 číslem 3.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Přičteme 3 krát řádek 3 k řádku 4.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Vynásobíme řádek 4 číslem 3.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Přičteme 2 krát řádek 4 k řádku 1.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Přičteme 3 krát řádek 3 k řádku 1.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Přičteme 4 krát řádek 3 k řádku 2.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Přičteme řádek 2 k řádku 1.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(c) Určete matici přechodu od souřadnic báze A k souřadnicím báze B.

Řešení: Už umíme převédst souřadnice od báze A ke kanonické a od kanonické k bázi B prostým složením těchto zobrazení dostaneme požadovanou matici přechodu. Tedy ${}_B[\mathrm{id}]_A = {}_B[\mathrm{id}]_K {}_K[\mathrm{id}]_A = B^{-1}A$.

3. Jakému lineárnímu zobrazení odpovídá zobrazení $x \mapsto Ax$?

   Řešení: Jednotlivým vektorům kanonické báze přiřadíme jednotlivé sloupce matice A.

4. Dokažte, že lineární zobrazení je plně určeno tím, kam zobrazíme bázové vektory. Tedy pokud máme zadáno $f(b_i) = b'_i$ pro $b_1, \dots, b_n$ bázi, pak $f(v) = f(\sum_{i=1}^n a_i b_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(b_i) = \sum_{i=1}^n a_i b'_i$.

   Řešení: Postupně rozepíšeme podle definice lineárního zobrazení.

5. Jak souvisí lineární zobrazení se souřadnicemi a převody mezi bázemi. . . ?

   Řešení: Na převod mezi souřadnicemi se můžeme dívat jako na lineární zobrazení.

6. Vymýšlejte matice různých lineárních zobrazení v rovině: prodloužení souřadnice x, zrcadlové otočení podle osy y, otočení okolo počátku o úhel α, zkosení. . .

(Pro otrlé) Rozmyslete si, jak proložit dané body pomocí Čebyševových polynomů.

10 Cvičení

0. Písemka.

1. Vymýšlejte matice různých lineárních zobrazení v rovině: prodloužení souřadnice x, zrcadlové otočení podle osy y, otočení okolo počátku o úhel a jiné. *Řešení:*

   (a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu:

   Stačí určit obrazy vektorů kanonické báze $e_1 = (1, 0)^T$ a $e_2 = (0, 1)^T$ vůči téže bázi K při osové souměrnosti f. Zřejmě $[f(e_1)]_K = f(e_1) = (0, 1)^T$ a podobně $f(e_2) = (1, 0)^T$.

   Z nich již snadno sestavíme matici osové souměrnosti $[f]_{KK} = \Big(f(e_1), f(e_2)\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) otočení o 90° kolem počátku proti směru hodinových ručiček. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček (první osa je vodorovná, druhá svislá). $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

   (d) projekce na první souřadnici $p_1 : (x, y) \to (x, 0)$. $[p_1]_{KK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ α,

   (e) Zkosení. . .

2. O funkci f víme, že $f\left((1, 2, 3)^T\right) = (1, 2, 0, 0)^T$, $f\left((3, 2, 3)^T\right) = (1, 2, 0, 0)^T$, $f\left((2, 1, 0)^T\right) = (1, 2, 3, 0)^T$. Nalezněte matici ${}_K[f]_K$, tedy matici, která bere vektor x v kanonické bázi a vrací $f(x)$ také v kanonické bázi.

   Řešení: TODO

3. Rozložte matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ na součin dolní trojúhelníkové matice a horní trojúhelníkové matice. Nápověda vyjádřete si elementární úpravy pomocí násobení matic. Dávejte pozor na prohazování řádků.

4. Vymyslete, jak reprezentovat počítání Fibonacciho čísel pomocí násobení matic. Jak rychle umíte spočítat F_n? Zkuste využít asociativity násobení matic.

(Pro otrlé) Rozmyslete si, jak proložit dané body pomocí Čebyševových polynomů.