

1. Počítejte řešení následujících soustav rovnic:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$$

$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1$$

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1$$

2. Nalezněte aspoň jedno netriviální řešení soustavy $Ax = 0$. Proveďte zkoušku i s případnými

parametry. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

3. Násobte matice napsané na tabuli.

4. Invertujte následující matice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Příklady pro početně zdatné:

5. Vymyslete, jak reprezentovat elementární úpravy násobením matic. Umíte rozložit matici na součin dolní a horní trojúhelníkové matice?
6. Vymyslete, jak rychle mocnit číslo. Například spočítejte (na papíře), kolik je 3^{16} s použitím co nejméně násobení. Co by bylo třeba upravit, kdybychom měli exponent, který není mocninou dvojky?
7. Vymyslete, jak násobením matic reprezentovat počítání Fibonacciho čísel. Fibonacciho čísla jsou daná jako $F_1 = F_2 = 1$ a pak $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$. Jak bychom to mohli použít k jejich rychlému počítání? (Nápověda: obdobný postup jako v předchozím příkladě.)
8. Pokud soustava rovnic má řešení, tak ho umíme najít a umíme ověřit, že řešení je řešením (zkouška). Tedy jedno takové řešení je "svědek" toho, že soustava je řešitelná. Vymyslete "svědka" toho, že soustava žádné řešení nemá. (Poznámka: se "svědky" neboli certifikáty něčeho se v informatice velice často setkáváme, například v teorii složitosti.)

(2 body) Spočítejte řešení následující soustavy rovnic a proveďte zkoušku (i s případnými parametry):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 5 & 7 \end{array} \right)$$

(2 body) Spočítejte součin těchto dvou matic: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2 body) Spočítejte inverzní matici k matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$