Řešená cvičení z lineární algebry II

Karel Král

30. března 2016

Tento text není určen k šíření. Všechny chyby v tomto textu jsou samozřejmě záměrné. Reportujte je prosím na adresu `kralka@kam.mff.cuni`....

Obsah

1 Cvičení

1. Spočítejte řešení soustavy rovnic napsané na tabuli.
2. Vypočítejte determinant matice napsané na tabuli, jak v $\mathbb{R}$, tak v $\mathbb{Z}_5$.
3. Opakování lineárních zobrazení.

   Pro rozepsané řešení podobného problému se podívejte do řešených příkladů ze zimního semestru, 8. cvičení.

   (a) Napište matici derivace polynomů stupně nejvýš čtyři (pro kanonickou bázi).

   (b) Napište matici derivace polynomů, aby brala vektory v bázi $3 + x, 1 + x, x^2, x + x^2 + x^3, 2x^2 + x^4$ a vracela vektory v bázi $1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3$.

Def. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, pak skalární součin je binární operace $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{R}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje:

   (a) $\langle x \mid x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane jen pro $x = \vec{0}$

   (b) $\langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$

   (c) $\langle \alpha x \mid y \rangle = \alpha \langle x \mid y \rangle$

   (d) $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$

4. Pro skalární součin definovaný $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$ ukažte, že jsou funkce $3x^2 - 1$ a $5x^3 - 3x$ navzájem kolmé.

2 Cvičení

Def. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, pak skalární součin je binární operace $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{R}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje:

   (a) $\langle x \mid x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane jen pro $x = \vec{0}$

   (b) $\langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$

   (c) $\langle \alpha x \mid y \rangle = \alpha \langle x \mid y \rangle$

   (d) $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$

   Řekneme, že vektory u, v jsou na sebe *kolmé*, pokud $\langle x \mid y \rangle = 0$.

   Norma daná skalárním součinem je $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$. Intuitivně norma určuje délku vektoru. Připomeňme, že norma lze definovat i o něco obecnějším způsobem, ale normy dané skalárním součinem jsou velice užitečné.

   Geometrická interpretace standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$ je pak $\langle x \mid y \rangle = \|x\|\|y\| \cos(\varphi)$, kde φ je úhel mezi vektory x, y (porovnejte s definicí kolmosti).

1. Ukažte, že následující jsou skalární součiny:

   (a) (Standardní skal. souč.) V $\mathbb{R}^n$ definujeme $\langle x \mid y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

   (b) V prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$ spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ definujeme $\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

2. Spočítejte standardní skalární součin vektorů $(1, 2, 3)^T, (0, 0, 1)^T, (1, -2, 1)^T$. Které z nich jsou navzájem kolmé? Jaká je délka prvního vektoru? Jak daleko jsou od sebe první a třetí vektor?

Řešení: $\langle(1,2,3)^T|(0,0,1)^T\rangle = 1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 1 = 3$ – nejsou kolmé, $\langle(1,2,3)^T|(1,-2,1)^T\rangle = 1-4+3=0$ tedy jsou kolmé, $\langle(0,0,1)^T|(1,-2,1)^T\rangle = 1$ tedy nejsou kolmé.

Délka prvního vektoru $\|(1,2,3)^T\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$.

První a třetí vektor jsou od sebe $\|(1,2,3)^T - (1,-2,1)^T\| = \|(0,4,2)^T\| = \sqrt{20}$.

3. Označme řádky matice A jako vektory $v_1,\ldots,v_m$ a sloupce matice B vektory $w_1,\ldots,w_p$. Čím jsou tvořeny jednotlivé prvky matice AB?

   Řešení: $(AB)_{i,j} = \langle v_i|w_j\rangle$

   Dokažte, že řádkový prostor a kernel jsou navzájem kolmé.

   Řešení: Kernel je vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy rovnic, tedy pro každý řádek musí platit, že po dosazení dostaneme nulu.

4. Pro skalární součin definovaný $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ ukažte, že jsou funkce $3x^2-1$ a $5x^3-3x$ navzájem kolmé.

   Řešení: $\int_{-1}^{1}(3x^2-1)(5x^3-3x)\,dx = \int_{-1}^{1} 15x^5 - 14x^3 + 3x\,dx = [\frac{15}{6}x^6 + \frac{7}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{1} = 0$

5. O symetrické matici A, pro kterou platí $x^TAx > 0$ pro všechna nenulová $x \in \mathbb{R}^n$ řekneme, že je pozitivně definitní. Definujme skalární součin $\langle x|y\rangle = x^TAy$, dokažte, že toto je opravdu skalární součin právě když A je pozitivně definitní.

   Řešení: Přímo ověření definice.

   Pro daný skalární součin odvoďte obecný způsob, jak najít pozitivně definitní matici A, která ho určuje.

   Řešení: Podívejte se, co se děje v součinech dvojic vektorů z kanonické báze.

6. Dokažte, že množina všech pozitivně definitních matic je konvexní.

7. Mějme dva vektory $(2,5)^T, (3,1)^T$, co musíme odečíst od prvního, aby byl kolmý na druhý? Co musíme odečíst od druhého aby byl kolmý na první?

3 Cvičení

1. Dokažte, že řádkový prostor a kernel matice jsou navzájem kolmé (vzhledem k standardnímu skalárnímu součinu).

   Řešení: Kernel je vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy rovnic, tedy pro každý řádek musí platit, že po dosazení dostaneme nulu.

2. Ověřte, že následující matice jsou pozitivně definitní a proveďte Chleského dekompozici:

   Řešení: Pro ověření pozitivní definitnosti použijeme větu 11.9 ze skript Milana Hladíka. Čtvercová matice $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & A^* \end{pmatrix}$ (kde α je číslo, a je první sloupec bez prvku v prvním řádku a A^* je matice A bez prvního řádku a prvního sloupce) je pozitivně definitní právě když $\alpha > 0$ a zároveň $A_1 = A^* - \frac{1}{\alpha}aa^T$ je pozitivně definitní.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 14 \end{pmatrix}$ *Řešení:* $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Není pozitivně definitní.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Matice je jen pozitivně semidefinitní (tj. symetrická a pro každý vektor x platí $x^T Ax \geq 0$). Choleského rozklad není jednoznačný.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ *Řešení:* $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 11 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ *Řešení:* $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Proveďte Choleského dekompozici a spočítejte soustavu rovnic $Ax = b$ pro $b = (3, 1, 3)^T$ a $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 18 & 6 \\ 2 & 6 & 18 \end{pmatrix}$ *Řešení:* $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, pak řešíme soustavu $Ax = b$, tedy $U^T Ux = b$ zavedením substituce $Ux = y$ a $U^T y = b$.

4. Mějme dva vektory $(2, 5)^T, (3, 1)^T$, co musíme odečíst od prvního, aby byl kolmý na druhý? Co musíme odečíst od druhého aby byl kolmý na první?

   Řešení: Řešme druhou část, ilustrace viz obrázek 1. Délka vektoru $u = (2, 5)$ je $\|(2, 5)\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$. Délka vektoru $v = (3, 1)$ je $\|(3, 1)\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Vektor se stejným směrem jako v a jednotkovou délkou je $v/\|v\| = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$. Skalární součin $\langle u|v\rangle = 6 + 5 = 11$. Vzpomeňme si na středoškolskou goniometrii, vidíme že pokud by vektor v měl jednotkovou délku, promítl by se na $\frac{\cos(\varphi)}{\|u\|}u$. Využitím podobnosti trojúhelníků a vztahu $\langle x|y\rangle = \|x\|\|y\| \cos \varphi$ dostaneme první krok Gram-Schmidtovy ortogonalizace, tedy vyjádření kolmého vektoru $v - u\langle u|v\rangle/\langle u|u\rangle = (3 - (22/29), 1 - (55/29))$. Ověřme ještě ortogonalitu: $\langle (2, 5)|(3 - (22/29), 1 - (55/29))\rangle = 6 - 44/29 + 5 - 275/29 = 0$.

5. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem určete podle Gramm-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_r\}$ řádkového prostoru matice:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   Řešení: Napřed odečtením projekcí zjistíme kolmý vektor $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i \mid z_j\rangle z_j$ a ten pak normalizujeme $z_i = y_i/\|y_i\|$.

   Bázi rozšiřte na ortonormální bázi celého $\mathbb{R}^4$. *Řešení:* Stačí přidat ortonormální bázi kernelu.

6. Spočítejte vzdálenost bodu $A = (5, 5, 3, 3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8, -1, 1, -2)^T, C = (4, -2, 2, -1)^T$.

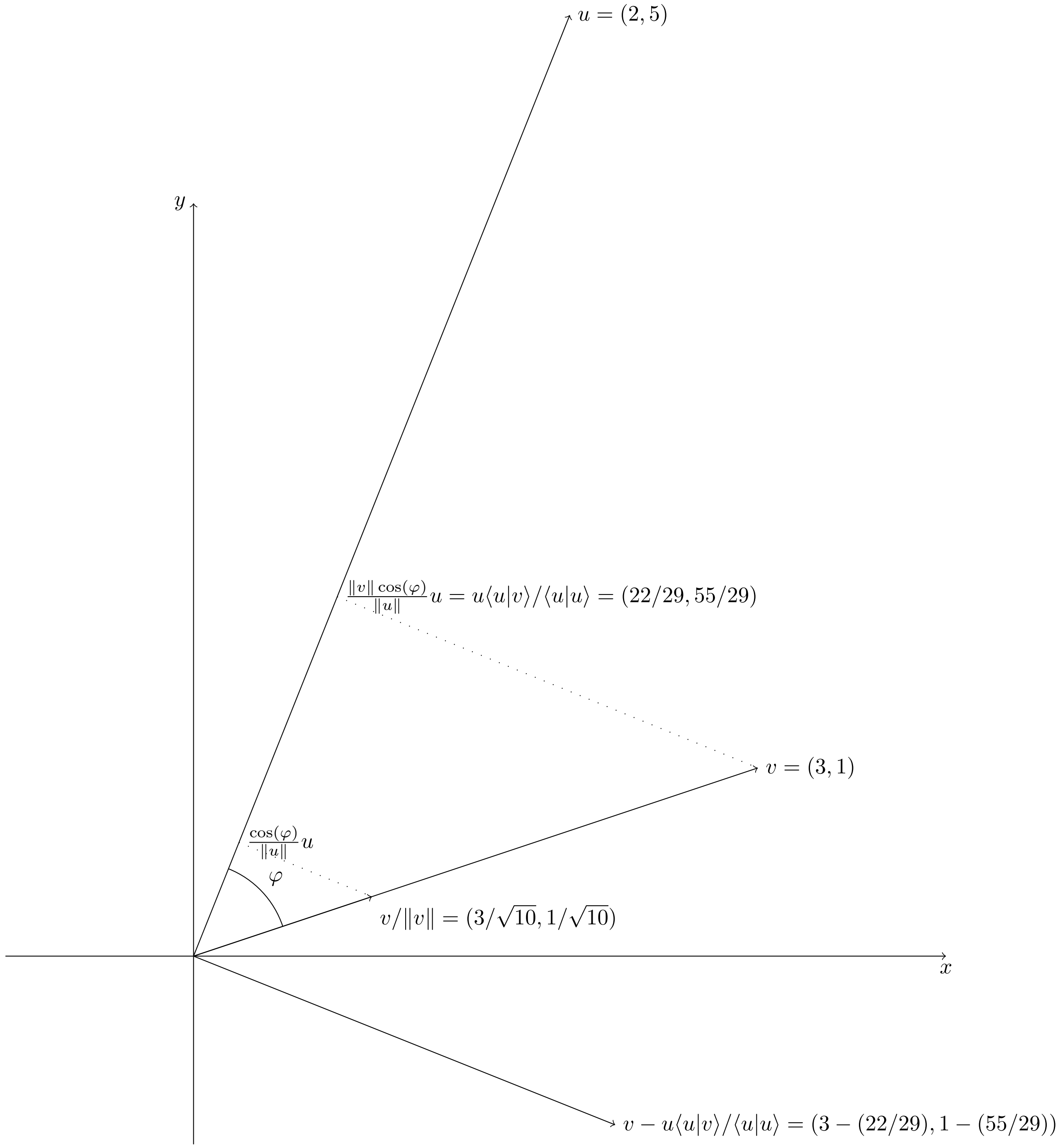
   Řešení: Vzdálenost je norma y_3 při Gramm-Schmidtově ortogonalizaci.

4 Cvičení

1. Choleského dekompozice pro $\mathbb{C}$ matice $\begin{pmatrix} 1 & 2i - 2 \\ -2i - 2 & 9 \end{pmatrix}$. *Řešení:* $U = \begin{pmatrix} 1 & 2i - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Proveďte Gramm-Schmidtovu ortonormalizaci vektorů $(-3, 3)^T, (0, 1)^T$ a u toho kreslete.

3. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem určete podle Gramm-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_r\}$ řádkového prostoru matice:



Obrázek 1: Počítání kolmé projekce vektoru v na vektor u.

Řešení: Napřed odečtením projekcí zjistíme kolmý vektor $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i \mid z_j \rangle z_j$ a ten pak normalizujeme $z_i = y_i / \|y_i\|$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Bázi rozšiřte na ortonormální bázi celého $\mathbb{R}^4$. *Řešení:* Stačí přidat ortonormální bázi kernelu.

4. Spočítejte vzdálenost bodu $A = (5, 5, 3, 3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8, -1, 1, -2)^T, C = (4, -2, 2, -1)^T$.

   Řešení: Vzdálenost je norma y_3 při Gramm-Schmidtově ortogonalizaci.

5 Cvičení

1. Proveďte Gramm-Schmidtovu ortornomalizaci na vektory $(1, 1, 1, 2, 2, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)^T, (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$.
2. Určete ortonormální bázi řádkového prostoru matice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Spočítejte kolmou projekci vektoru $(2, 2, 1, 5)^T$ do řádkového prostoru této matice. Určete ortonormální bázi ortogonálního doplňku tohoto prostoru.
3. Spočítejte vzdálenost bodu $A = (5, 5, 3, 3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8, -1, 1, -2)^T, C = (4, -2, 2, -1)^T$.

   Řešení: Vzdálenost je norma y_3 při Gramm-Schmidtově ortogonalizaci.
4. Metoda nejmenších čtverců. Viz skripta Milana Hladíka. Proveďte lineární regresi pro body $(0, 1), (2, 1), (3, 4)$.
5. Pro skalární součin definovaný $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ ukažte, že jsou funkce $3x^2 - 1$ a $5x^3 - 3x$ navzájem kolmé.

   Řešení: $\int_{-1}^{1} (3x^2 - 1)(5x^3 - 3x)\,dx = \int_{-1}^{1} 15x^5 - 14x^3 + 3x\,dx = [\frac{15}{6}x^6 + \frac{7}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{1} = 0$
6. Ukažte, že v skalárním součinu $\langle f|g \rangle = \int_{-r}^{r} f(x)g(x)\,dx$ jsou na sebe kolmé i funkce $\sin(ax)$ a $\cos(bx)$ pro libovolné pevné $a, b \in \mathbb{R}$.

6 Cvičení

1. Spočítejte derminanty následujících reálných matic:

   $\begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Nejpve použijte řádkové úpravy. Determinant matice je 1001.

   $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *Řešení:* Determinant matice je 30.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ *Řešení:* Determinant matice je 15.

2. Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, *Řešení:* Zobrazení odpovídá dvojnásobnému zvětšení. Proto jsou vlastní čísla $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Libovolný vektor je vlastní, zobrazení ho dvakrát prodlouží — nakreslete si obrázek.

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *Řešení:* Rotace o 90 stupňů v kladném směru. I když to geometricky nevypadá, i tato matice má vlastní čísla a vlastní vektory – komplexní $+i$ a $-i$ s vlastními vektory $(1, i)$ a $(1, -i)$. Geometrické vysvětlení je takové, že násobení imaginární jednotkou i otáčí čísla v komplexní rovině o 90 stupňů.

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. *Řešení:* Rotace o obecný úhel φ. Snadným výpočtem nalezneme, že vlastní čísla jsou $e^{\varphi i}$ a $e^{-\varphi i}$ s vlastními vektory $(1, i)$ a $(1, -i)$. Opět, násobení komplexním číslem $e^{\varphi i}$ znamená rotaci v komplexní rovině o úhel φ.

3. Určete vlastní čísla matice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

Řešení: Rozvojem podle 2. a 4. řádku a 3. sloupce dostaneme $\begin{vmatrix} 3-t & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1-t & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1-t & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3-t \end{vmatrix} =$

$(2-t)(1-t)^2 \begin{vmatrix} 3-t & -2 \\ 4 & -3-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t)^3(1+t)$ Vlastní čísla jsou 2, 1 (trojnásobné) a -1.