Řešená cvičení z lineární algebry I

Karel Král

3. ledna 2016

Tento text není určen k šíření. Všechny chyby v tomto textu jsou samozřejmě záměrné. Reportujte je prosím na adresu `kralka@kam.mff.cuni`....

Obsah

1 Cviceni 1 **2**

2 Cviceni 2 **9**

3 Cviceni 3 **10**

4 Cviceni 4 **12**

5 Cviceni 5 **12**

6 Cviceni 6 **12**

7 Cviceni 7 **13**

8 Cviceni 8 **13**

9 Cviceni 9 **15**

10 Cviceni 10 **17**

11 Cviceni 11 **18**

1 Cvičení

1. Spočítejte $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Nadále budeme psát $(a,b)^T$ místo $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

   Řešení: Vektory sčítáme po jednotlivých prvcích. Výsledek: $\begin{pmatrix}1-4(-1)+2\cdot 1\\ 3-4\cdot 3+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}$.

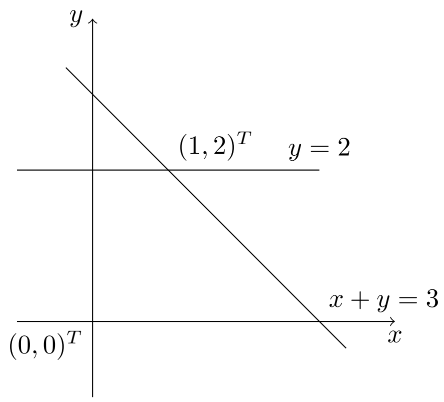
2. Co je řešením rovnice $2y-1=3$? Co je řešením, pokud přidáme rovnici $x+y=3$? Napište maticový zápis (druhou rovnici napište na první řádek), nakreslete jako průsečík přímek a jako součet vektorů.

   Řešení: První rovnici upravíme na $y=2$ (k oběma stranám přičteme jedna a pak obě strany vydělíme dvěma). Dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} x+y &= 3\\ y &= 2 \end{aligned}$$

   Jejím řešením je očividně bod $(1,2)^T$ (ten získáme takzvanou zpětnou substitucí).

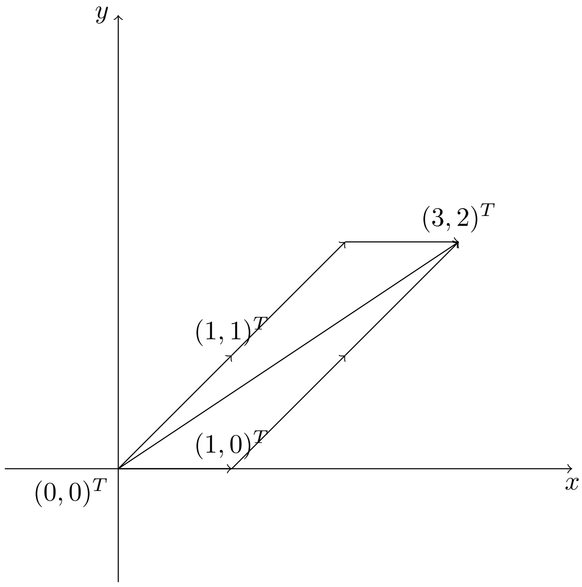
   Řádkový pohled dává průnik nadrovin, které jsou ve dvou rozměrech přímky. Neformální intuice je, že v jedné rovnici si můžeme zvolit všechny proměnné až na jednu, kterou dopočítáme, dimenze množiny bodů, které danou rovnici splňují tedy bude o jedna menší než dimenze celého prostoru.



   Sloupcový pohled: chceme najít řešení vyjádřené jako součet sloupců matice

$$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

   Sloupcové vektory matice nakreslíme do roviny a stejně tak vektor pravých stran.



3. Popište průnik nadrovin $2w + 7x - y + 3z = 5$, $2w - y + 3z = 3$ a $2w - y = 1$ (vše ve čtyřech rozměrech, tedy v $\mathbb{R}^4$). Co je to geometricky (přímka, bod nebo prázdná množina)? Jaký je průnik, pokud přidáme $2w = -1$? Najděte čtvrtou rovnici tak aby průnikem byla prázdná množina.

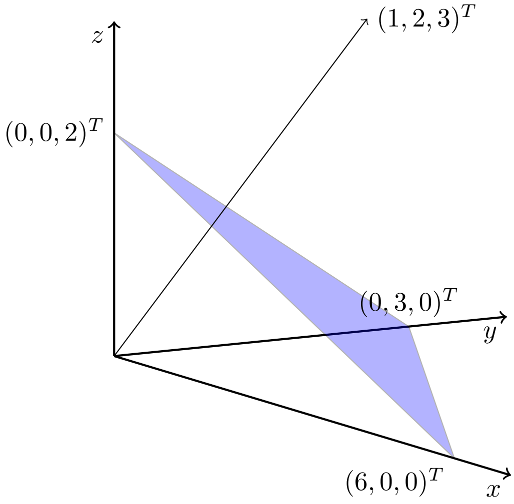
   Řešení: Tohle nenakreslím, ale můžeme řešit jako rovnice s řešením $x = 2/7, y = 2w - 1, z = 2/3$, které můžeme zapsat jako: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2/7 \\ -1 \\ 2/3 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, což je přímka (honosně řečeno afinní prostor).

   Přidáním rovnice $2w = -1$ dostaneme jediný bod (dosadíme $w = -1/2$ do vyjádření přímky).

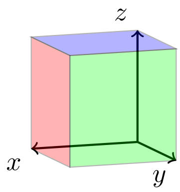
   Pokud bychom chtěli přidat rovnici, tak aby neexistovalo řešení, můžeme přidat jakoukoliv rovnici, která neobsahuje přímku z prvního odstavce. Nejjednodušší je $2w + 7x - y + 3z = 0$.

4. Pro každou polohu tří rovin v prostoru (všechny rovnoběžné, průnik jeden bod, průnik přímka, ...) napište soustavu, která má takový tvar. Co znamená rovnoběžnost rovin pro soustavu rovnic? (Hint: počet řešení a dva řádky vyjadřující dvě rovnoběžné roviny.)

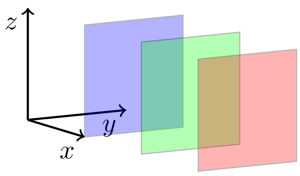
   Řešení: Rovnice $1x + 2y + 3z = 6$ určuje rovinu s normálovým vektorem $(1, 2, 3)^T$ (ten je na ni kolmý). Tato rovina prochází například body $(6, 0, 0)^T$, $(0, 3, 0)^T$ a $(0, 0, 2)^T$, stačilo za dvě souřadnice cokoliv dosadit a dopočítat třetí souřadnici.



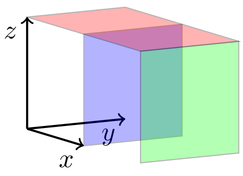
Obrázek 1: Rovina se svým normálovým vektorem.



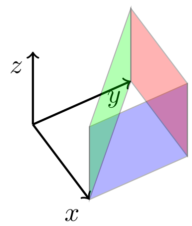
Obrázek 2: Tři roviny $x = 1$ (červeně), $y = 1$ (zeleně), $z = 1$ (modře). Všechny se protínají v jednom bodě.



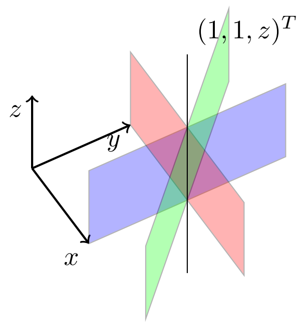
Obrázek 3: Tři roviny $x = 1$ (modře), $x = 2$ (zeleně), $x = 3$ (červeně). Všechny rovnoběžné, tedy nemají společný průnik.



Obrázek 4: Tři roviny $x = 1$ (modře), $x = 2$ (zeleně), $z = 1$ (červeně). Dvě rovnoběžné, tedy nemají společný průnik.



Obrázek 5: Tři roviny $x = 1$ (modře), $y = 1$ (červeně), $x + y = 1$ (zeleně). Žádné rovnoběžné, ale nemají společný průnik.



Obrázek 6: Tři roviny $x = 1$ (modře), $y = 1$ (červeně), $x + y = 2$ (zeleně). Žádné rovnoběžné, společný průnik je přímka.

5. Určete středovou rovnici kružnice procházející body $(3,3)^T, (1,5)^T, (5,5)^T$ Pro připomenutí kružnice se středem $S = (s_1, s_2)^T$ a poloměrem $r \in [0, \infty)$ má rovnici $(x-s_1)^2+(y-s_2)^2 = r^2$.

   Řešení: Napišme si soustavu rovnic:

$$(3 - s_1)^2 + (3 - s_2)^2 = r^2$$
$$(1 - s_1)^2 + (5 - s_2)^2 = r^2$$
$$(5 - s_1)^2 + (5 - s_2)^2 = r^2$$

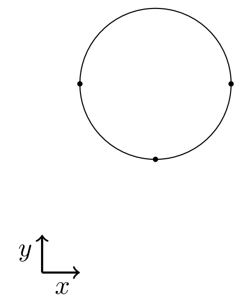
   Po roznásobení:

$$s_1^2 - 6s_1 + 9 + s_2^2 - 6s_2 + 9 = r^2 \quad (1)$$
$$s_1^2 - 2s_1 + 1 + s_2^2 - 10s_2 + 25 = r^2 \quad (2)$$
$$s_1^2 - 10s_1 + 25 + s_2^2 - 10s_2 + 25 = r^2 \quad (3)$$

   Od první i od druhé rovnice odečteme třetí rovnici:

$$4s_1 - 16 + 4s_2 - 16 = 0$$
$$8s_1 - 24 = 0$$

   Výsledkem tedy je: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 2^2$.



Obrázek 7: Kružnice se středem v $(3, 5)^T$ a poloměrem dva.

6. Pod jakou podmínkou jsou body $(0, y_1)^T, (1, y_2)^T, (2, y_3)^T$ na jedné přímce? Pod jakou podmínkou jsou body $(0, 0)^T, (y_1, y_2)^T, (y_3, y_4)^T$ na jedné přímce?

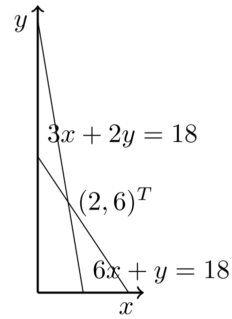
   Řešení: Napišme si parametrickou rovnici přímky procházející body $(0, y_1)^T, (1, y_2)^T$, ta je $(0, y_1)^T + t(1, y_2 - y_1)^T$ pro $t \in \mathbb{R}$. Aby třetí bod $(2, y_3)^T$ ležel na této přímce, musí $t = 2$ a tedy $y_3 = 2(y_2 - y_1)$.

   Obdobně řešíme i druhý případ, parametrická rovnice je $t(y_1, y_2)^T$ a třetí bod tedy splňuje $y_3 = ty_1$ a zároveň $y_4 = ty_2$ (pro tu samou hodnotu t).

   Tento příklad je řešitelný obdobně i pomocí obecné rovnice.

7. Najděte rovnici přímky, jejíž úsek mezi souřadnými osami je rozdělen bodem $(2, 6)^T$ na dvě části v poměru 1:2.

   Řešení: Využijeme podobnosti trojúhelníků, z průsečíků s osami snadno odvodíme příslušné rovnice.



Obrázek 8: Obě řešení.

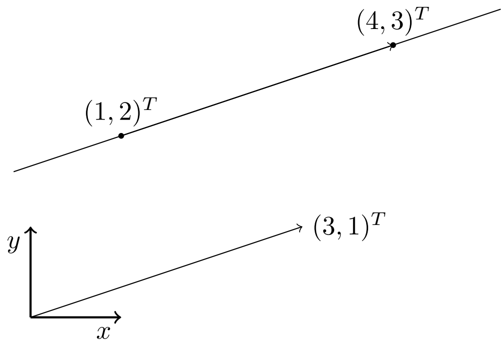
8. (a) Napište parametrické vyjádření $S = \{\vec{u} + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ přímky jdoucí body $(1, 2)^T, (4, 3)^T$.

   Řešení: Parametrické vyjádření se skládá ze "startovního" vektoru u a směrového vektoru v, "podél kterého se můžeme pohybovat ze startu."

   Startovní vektor můžeme volit například vektor $(1, 2)^T$ a směrový získáme jako druhý vektor minus tento první $(4, 3)^T - (1, 2)^T = (3, 1)^T$. Parametrické vyjádření tedy je $\left\{(1, 2)^T + t(3, 1)^T \mid t \in \mathbb{R}\right\}$.

   Platí, že místo teď vypočteného směrového vektoru můžeme vzít jeho jakýkoliv nenulový násobek, což změní jen hodnotu parametru t.

   Všimněte si, že volně zaměňuji body z prostoru $\mathbb{R}^2$ za vektory. Pokud zvolíme soustavu souřadnic, pak se na bod můžeme dívat jako na vektor jeho souřadnic. Naproti tomu vás čeká mnohem obecnější definice vektorů. Vektorem bude mimo jiné i funkce $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



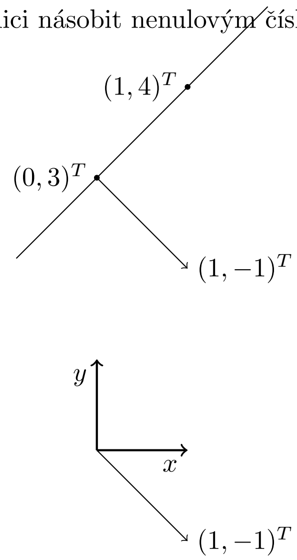
Obrázek 9: Přímka, vyznačený směrový vektor.

(b) Napište obecnou rovnici $ax + by + c = 0$ přímky jdoucí body $(0,3)^T, (1,4)^T$. Nakreslete vektor $(a,b)^T$, nepřijde vám kolmý na tu přímku?

Řešení: Zde řešíme soustavu rovnic, případně určíme směrový vektor a k němu kolmý vektor zvaný normálový (pro vektor $(a,b)^T$ je kolmým vektorem vektor $(-b,a)^T$ i vektor $(b,-a)^T$, to že jsou opravdu kolmé bude předmětem některého příštího cvičení).

Směrový vektor je $(1,1)^T$, normálový tedy bude $(1,-1)^T$. Normálový vektor udává koeficienty a, b v rovnici $ax + by = c$. Dosazením dopočteme koeficient c. Výsledek je $x - y = -3$.

Opět můžeme celou rovnici násobit nenulovým číslem a přímka zůstane nezměněna.



Obrázek 10: Přímka, vyznačený normálový vektor.

(c) Převeďte obecnou rovnici $3x - 2y + 1 = 0$ na parametrické vyjádření.

Řešení: Můžeme spočítat dva body ležící na této přímce a postupovat jako v předešlém případě. Druhá možnost je spočítat směrový vektor $(2,3)^T$ (kolmý na normálový vektor $(3,2)^T$) a dopočítat startovní bod například dosazením nuly za x a získáním $(0,1/2)^T$.

(d) Převeďte parametrické vyjádření $S = \left\{(1,2)^T + t(-1,2)^T \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ na obecnou rovnici.

Řešení: Můžeme spočítat dva body ležící na této přímce a postupovat jako v předešlém případě. Druhá možnost je spočítat normálový vektor $(2,1)^T$ (kolmý na směrový vektor $(-1,2)^T$) a dopočítat $c = -4$ pro počáteční bod $(2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + c = 0)$.

Jsou daná vyjádření jednoznačná? *Řešení:* Nejsou. Směrový vektor můžeme vynásobit libovolnou nenulovou konstantou. Navíc jako počáteční bod můžeme volit libovolný bod na dané přímce. Obdobně celou obecnou rovnici můžeme vynásobit libovolnou nenulovou konstantou.

Najděte obě vyjádření roviny procházející body $(1,2,0)^T, (-1,0,1)^T, (0,3,1)^T$, pokuste se je na sebe navzájem převést. Co by se stalo, kdyby všechny tři body byly na jedné přímce?

Řešení: TODO

9. Alenka má o tři jablíčka víc než Bohouš. Pokud bychom dali každému z nich jedno jablíčko, měla by Alenka dokonce dvakrát tolik jablíček než Bohouš. Sestavte soustavu rovnic. Pokud si troufnete, vyřešte.

   Řešení: Viz příští cvičení.

10. Pro danou soustavu rovnic $Ax = b$, co se stane s řešením x, když

    (a) Prohodíme dvě rovnice (změníme pořadí rovnic).

    (b) Vynásobíme jednu rovnici nenulovým číslem.

    (c) Přičteme jednu rovnici k druhé.

    Řešení: Nestane se nic, těmto úpravám říkáme ekvivalentní úpravy.

    Použijte konkrétní zadání minulého příkladu a nakreslete, co se děje s průsečíky přímek a co se děje se sloupcovým pohledem na věc.

    Řešení: Průsečíky přímek zůstávají na jednom místě, protože řešení se nemění. Viz příští cvičení.

    Co se děje s řešením, pokud předchozí (prohození, násobení a přičtení) provádíme se sloupci?

    Řešení: Pokud je (jedním libovolným) řešením soustavy vektor

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)^T$$

a prohodíme sloupce i a j, pak je řešením vektor

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)^T.$$

Pokud je řešením vektor

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)^T,$$

pak po vynásobení i-tého sloupce nenulovým číslem $c \in \mathbb{R}$ bude řešením

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i/c, x_{i+1}, \dots, x_n)^T$$

Pokud je řešením vektor

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)^T$$

a přičteme sloupec i k sloupci j, pak je řešením vektor

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)^T.$$

Pro zamyšlení: je zbytečné, pokud by byly dvě rovnice stejné, nebo jedna rovnice násobkem druhé, nebo jedna rovnice součtem jiných dvou? Je zbytečný nějaký sloupec, pokud by byl stejný jako jiný, násobkem jiného či součtem jiných dvou?

Řešení: Ano, tyto úvahy vedou na hodnost matice.

11. Pro soustavu rovnic $A\vec{x} = 0$ (všechny pravé strany jsou nuly) dokažte, že pro dvě její řešení $\vec{x}, \vec{y}$ jsou řešením také $c\vec{x}$ (pro $c \in \mathbb{R}$) a $\vec{x} + \vec{y}$. Má tato soustava vždy aspoň jedno řešení?

    Řešení: Používáme maticový zápis a vlastnosti počítání s maticemi, vše ale jde rozepsat pomocí soustav rovnic. Pro dvě řešení je jejich součet také řešením: $A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$, kde 0 je nulový sloupcový vektor vhodného rozměru. Násobek řešení je také řešením $A(cx) = cAx = c0 = 0$ pro konstantu $c \in \mathbb{R}$.

12. O matici $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ dokažte, že druhý řádek je násobkem prvního řádku právě když je druhý sloupec násobkem prvního sloupce. Zkuste i pro obecnou matici dva krát dva, pozor na dělení nulou.

    Řešení: Prosté rozepsání. Až budete znát determinant, všimněte si, že pro obecnou čtvercovou matici dva krát dva to přesně znamená, že determinant je nulový.

2 Cvičení

1. Spočítejte výrazy:
    (a) $(4+2i) - (1-5i)$
    (b) $(3+2i)(2+i)$
    (c) $(3+2i)/(1-3i)$
    (d) $(1+i)^{20}$

2. Určete hodnoty v $\mathbb{Z}_{17}$ čísel 2^{101}, 3^{1001}, 4^{100001}.

3. Řešte: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 5 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right)$, *Řešení:* $x = (2, -2, 3)^T$.

    $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 12 \end{array}\right)$ *Řešení:* $x \in \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 7/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1 \\ -5/4 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$

4. Řešte soustavy rovnic: $Ax = \vec{0}$, $Ax = b$, $Ax = c$, kde:
    $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$.

    Řešení: Všimneme si, že v Gaussově eliminaci bychom s levými stranami prováděli pokaždé totéž a píšeme zkráceně: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -2 & 0 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 9 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 9 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 11 & 9 \end{array}\right) \sim$

    $\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 9 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

5. Spočítejte: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, *Řešení:* Toto je prosté dosazení za proměnné, vyjde $(17, 46, 51)^T$.

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \end{array}\right)$, *Řešení:* Pomocí elementárních úprav řešíme a vyjde $x = (-3, 11, -13, 7)^T$.

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$. *Řešení:* $x = (5, 3, -2, 2, -10)^T$.

6. Co doplnit za otazník, aby soustava (a) neměla žádné řešení, (b) měla nekonečně mnoho řešení: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 9 & ? \end{array}\right)$

   Řešení: Mohli bychom řešit Gaussovou eliminací a také bychom se dobrali výsledku. Můžeme si ale všimnout, že dvojnásobek prvního plus druhý řádek dá třetí řádek. Pokud tedy za otazník dosadíme šest, bude mít soustava nekonečně mnoho řešení. Dosadíme-li tam cokoliv jiného, nebude mít žádné řešení.

7. Vzhledem k parametru a řešte: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$

   Řešení: Viz příští cvičení.

3 Cvičení

1. Řešte soustavy rovnic: $Ax = \vec{0}$, $Ax = b$, $Ax = c$, kde:
   $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Řešení: Všimneme si, že v Gaussově eliminaci bychom s levými stranami prováděli pokaždé totéž a píšeme zkráceně: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -2 & 0 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 9 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 9 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 11 & 9 \end{array}\right) \sim$

   $\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 9 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

2. Spočítejte: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, *Řešení:* Toto je prosté dosazení za proměnné, vyjde $(17, 46, 51)^T$.

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 \end{array}\right)$, *Řešení:* Pomocí elementárních úprav řešíme a vyjde $x = (-3, 11, -13, 7)^T$.

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$. *Řešení:* $x = (5, 3, -2, 2, -10)^T$.

3. Co doplnit za otazník, aby soustava (a) neměla žádné řešení, (b) měla nekonečně mnoho řešení: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 9 & ? \end{array}\right)$

   Řešení: Mohli bychom řešit Gaussovou eliminací a také bychom se dobrali výsledku. Můžeme si ale všimnout, že dvojnásobek prvního plus druhý řádek dá třetí řádek. Pokud tedy za otazník dosadíme šest, bude mít soustava nekonečně mnoho řešení. Dosadíme-li tam cokoliv jiného, nebude mít žádné řešení.

4. Vzhledem k parametru a řešte: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$

   Řešení: Parametrem pokud možno nechceme dělit.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \qquad \text{prohodíme 1. a 3. řádek}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{od 2. řádku odečteme 1., od 3. odečteme } a \text{ násobek 1.}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \qquad \text{ke 3. přičteme 2.}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right) \qquad a \notin \{-2, 1\}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-a}{2-a-a^2} \end{array}\right) \qquad \text{ke 2. přičteme } a-1 \text{ násobek třetího}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \frac{(1-a)(a-1)}{2-a-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-a}{2-a-a^2} \end{array}\right) \qquad a \neq 1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1-a}{2-a-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-a}{2-a-a^2} \end{array}\right) \qquad \text{od 1. odečteme 2. a } a \text{ krát 3.}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 - \frac{1-a}{2-a-a^2} - a\frac{1-a}{2-a-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1-a}{2-a-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-a}{2-a-a^2} \end{array}\right)$$

   Ještě musíme vyřešit případy, kdy $a = 1$ a $a = -2$.

   Pokud $a = 1$, máme množinu řešení $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, tu můžeme psát také jako

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Pokud $a = -2$, pak řešíme jak jsme zvyklí a soustava nemá žádné řešení

5. Řešte soustavy rovnic a násobte matice podle zadání na tabuli.

4 Cvičení

1. Dokažte, že řešení homogenní soustavy rovnic (pravé strany jsou nulové) tvoří vektorový prostor.
2. Řešte soustavy rovnic: $Ax = \vec{0}$, $Ax = b$, $Ax = c$, kde:
$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. Určete inverzní matice k maticím ekvivalentních úprav.
4. Určete inverzní matici k matici A z příkladu 2.
5. Dokažte, že násobení vektoru maticí je lineární zobrazení.
6. Pomocí LU dekompozice spočítejte řešení soustav rovnic pro nějaký vektor pravých stran.
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ -6 & -2 & -12 \end{pmatrix}$

5 Cvičení

1. Řešte pomocí Gaussovy eliminace a pak pomocí LU rozkladu nad $\mathbb{Z}_7$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$

   Řešení: Viz skripta Milana Hladíka.
2. Dokažte, že v každé grupě platí $(a^{-1})^{-1} = a$ a zároveň $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.
3. Vezměme pevnou matici $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak matice, které s ní komutují tvoří vektorový prostor.
4. V prostoru $\mathbb{R}^4$ napište vektor $(-7, 12, 2, -4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(-5, 5, 1, -1)^T$, $(2, -5, 0, 2)^T$, $(3, 2, 0, -2)^T$, $(2, -3, 1, 1)^T$.
5. Dokažte, že soustava $Ax = b$ má řešení právě tehdy když $A^T y = 0, b^T y = 1$ nemá řešení.

6 Cvičení

1. Nechť V je vektorový prostor a $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, jestli jsou následující tvrzení pravdivá:
   (a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.
   (b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.
   (c) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.
   (d) Je-li X závislá, je Y závislá.
   (e) Je-li Y závislá, je X závislá.
2. Doplňte následující množiny na bázi.
   (a) $\{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}$ v $\mathbb{R}^4$.
   (b) $\{x^2, x^3 - 1, x + x^2\}$ v prostoru polynomů stupně nejvýš tři.

3. Určete bázi a dimenzi podprostoru $\mathbb{Z}_5^4$ generovaného vektory $(1,2,0,0)^T$, $(1,1,1,1)^T$, $(2,1,4,2)^T$, $(1,1,2,0)^T$. Pokud tento podprostor není celým $\mathbb{Z}_5^4$, doplňte ho aby byl bází celého prostoru.

4. Napište souřadnice vektoru $(3,1,4,5)^T$ vzhledem k uspořádané bázi z předchozího příkladu.

5. Ukažte, že pokud je V podprostorem prostoru W konečné dimenze, pak pro každou bázi X prostoru V existuje báze Y prostoru W taková, že $X \subset Y$.

6. Jsou-li V, W podprostory konečné dimenze, pak

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(\mathcal{L}(U \cup V)) + \dim(U \cap V).$$

A ukažte, že toto pro tři podprostory neplatí!

7 Cvičení

7. 12. bude velká písemka!

1. Ukažte, že pokud je V podprostorem prostoru W konečné dimenze, pak pro každou bázi X prostoru V existuje báze Y prostoru W taková, že $X \subset Y$.

2. Jsou-li V, W podprostory konečné dimenze, pak

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(\mathcal{L}(U \cup V)) + \dim(U \cap V).$$

A ukažte, že toto pro tři podprostory neplatí!

3. Invertujte matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Pracujeme nad $\mathbb{Z}_5^4$. Pro báze A, B dané sloupci matic $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Určete matici přechodu od souřadnic báze A ke kanonické bázi.

   (b) Určete matici přechodu od souřadnic kanonické báze k souřadnicím báze B.

   (c) Určete matici přechodu od souřadnic báze A k souřadnicím báze B.

5. Určete matici derivace polynomů stupně nejvýš 4.

6. Určete matice různých lineárních zobrazení v rovině.

8 Cvičení

7. 12. bude velká písemka!

1. Pracujeme nad $\mathbb{Z}_5^4$. Pro báze A, B dané sloupci matic $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Řešení: Připomeňme si základní pojmy: Nechť $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (tedy vektory a_i jsou sloupce matice A) je báze. Nechť vektor x má vyjádření $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i$, pak souřadnicemi vektoru x vzhledem k bázi A rozumíme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a vektor souřadnic značíme $[x]_A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$.

Například tedy, pokud bychom měli kanonickou bázi (značme $K = I_n$), pak $[x]_K = x$.

Matice přechodu: mějme A, B dvě báze jako v zadání, pak maticí přechodu od A k B rozumíme matici ${}_B[\,\mathrm{id}]_A$, po které chceme, aby pro každý vektor x platilo: $[x]_B = {}_B[\,\mathrm{id}]_A[x]_A$. Tedy ze souřadnic v bázi A nám udělá souřadnice v bázi B.

(a) Určete matici přechodu od souřadnic báze A ke kanonické bázi.

Řešení: Násobení $A[x]_A$ odpovídá lineární kombinaci sloupců A kde koeficienty jsou jednotlivé souřadnice. Tedy ${}_K[\,\mathrm{id}]_A = A$.

(b) Určete matici přechodu od souřadnic kanonické báze k souřadnicím báze B.

Řešení: Z předchozího víme, že $[x]_K = B[x]_B$. Užijeme krásné věty lineární algebry, která říká, že dimenze řádkového a sloupcového prostoru jsou stejné. Lidsky řečeno: když jsou nezávislé sloupce, jsou nezávislé i řádky a tedy matice je regulární. Tudíž existuje inverzní matice B^{-1}, kterou násobíme zleva a dostaneme: $B^{-1}[x]_K = [x]_B$. Vidíme tedy, že ${}_B[\,\mathrm{id}]_K = B^{-1}$.

(c) Určete matici přechodu od souřadnic báze A k souřadnicím báze B.

Řešení: Už umíme převédst souřadnice od báze A ke kanonické a od kanonické k bázi B prostým složením těchto zobrazení dostaneme požadovanou matici přechodu. Tedy ${}_B[\,\mathrm{id}]_A = {}_B[\,\mathrm{id}]_{K\,K}[\,\mathrm{id}]_A = B^{-1}A$.

2. Určete matici derivace polynomů stupně nejvýš 4.

Řešení: Jako obvykle se stačí koukat na bázové vektory, jejichž derivace přímo dají sloupce hledané matice: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Určete matice různých lineárních zobrazení v rovině. Například osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu. Otočení o úhel α. Projekce na první souřadnici, projekce na přímku procházející počátkem soustavy souřadnic.

4. Pracujeme v $\mathbb{Z}_5^3$ a K značí kanonickou bázi. O zobrazení f víme, že $f((2,4,1)^T) = (2,1,2)^T$, $f((2,3,4)^T) = (0,4,1)^T$, $f((3,0,1)^T) = (4,4,1)^T$.

(a) Nalezněte matici zobrazení f vůči kanonické bázi, tedy ${}_K[f]_K$.

Řešení: Nechť $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ je matice, kde sloupce jsou vektory, pro které máme hodnoty (vynecháno ověření lineární nezávislosti).

Matice zobrazení ${}_K[f]_B$ je dána po sloupcích výsledky funkce na vektory báze B, tedy ${}_K[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Stačí si představit, kam potřebujeme zobrazit bázi.

Matice přechodu od kanonické báze k bázi B je ${}_B[\,\mathrm{id}]_K = B^{-1}$ dle předchozího případu. Napřed tedy převedeme souřadnice vektoru z kanonické báze do báze B a pak ho zobrazíme podle funkce f.

Výsledkem tedy je ${}_K[f]_K = {}_K[f]_{B\,B}[\,\mathrm{id}]_K$.

(b) Nalezněte $\mathrm{Ker}(f)$ (tedy jádro zobrazení f, tj. všechny vektory, pro které platí $f(\vec{v}) = \vec{0}$).

Řešení: Jen řešíme soustavu rovnic, kde pravé strany jsou nulové.

9 Cvičení

Dualita se v matematice vyskytuje velice často. Vy jste se už nejspíš setkali s příkladem duálních grafů k rovinným grafům a s dualitou Platónských těles. Dalšími příklady se kterými se nejspíš setkáte je dualita lineárního programování, případně s dualitou v teorii matroidů. Toto jsou jen některé příklady.

Funkcionální analýza využívá dualitu podobnou té, kterou bereme tady. Její využití jsou například ve fyzice při řešení rovnovážné pozice membrány, zpracování signálů, obrázků nebo ve strojovém učení. Možná už jste slyšeli o dualismu "vlna/částice" v částicové fyzice. Případně o jiných dualitách.

Dualita

Pro dané lineární prostory V, U oba nad tělesem $\mathbb{T}$ tvoří lineání zobrazení z V do U vektorový prostor (přirozeně dvě funkce můžeme sečíst $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ a funkci můžeme vynásobit konstantou $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, zbytek ověřte sami). Lineární zobrazení je vzhledem k daným bazím jednoznačně určeno maticí, je to prostor dimenze $\dim(U) \cdot \dim(V)$. Nejzajímavější situace je $U = \mathbb{T}$.

Definice. *Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$, pak* lineární funkcionál *(nebo také* lineární forma*) je libovolné lineární zobrazení z V do $\mathbb{T}$.* Duální prostor *je lineární prostor všech funkcionálů, značíme ho V^*.*

Poznámky:

- Vznešeně řečeno duální prostor jsou homomorfismy z vektorového prostoru do jeho tělesa.
- Někdy se vektorům duálu říká *kovektory.* Ale toto značení není tak moc ustálené a například ve skriptech Pěstujeme lineární algebru se kovektor používá odlišně.
- Vektor duálu $v^* \in V^*$ tedy vezme vektor $u \in V$ a vrátí číslo tělesa. Navíc platí, že je to lineární funkce.

  Tento pohled bude důležitý, až se budeme bavit o duálu k duálu. Tam budou lineární funkce, které berou jako parametr lineární funkce z V do $\mathbb{T}$ a vrací číslo z tělesa $\mathbb{T}$.

Duální báze

Je-li $\dim(V) = n$ a $v_1, \dots, v_n$ báze V, pak duální prostor má bázi $f_1, \dots, f_n$, kde $f_i(v_j) = 0$ pro $i \neq j$ a $f_i(v_i) = 1$, tato báze se nazývá duální báze. Ověřte, že je to skutečně báze.

Konečně dimenzionální vektorové prostory V jsou tedy isomorfní se svým duálem V^*, s duálem svého duálu V^{**}, atd. Tento isomorfismus ale závisí na volbě báze prostoru V (pro jinou bázi bychom dostali jinou duální bázi). Pozor, toto pro nekonečně dimenzionální vektorové prostory není tak jednoduché!

Vektor duální báze je vlastně projekce do i-té souřadnice. Jinými slovy vrací hodnotu i-té souřadnice.

Vektorové vyjádření

Pro danou bázi prostoru V můžeme reprezentovat vektor $u \in V$ pomocí vektoru souřadnic $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$

Obdobně můžeme vektor $g \in V^*$ reprezentovat řádkovým vektorem $[g_1, \dots, g_n]$. Tak, že pro vektor $u \in V$ definujeme

$$g(u) = [g_1, \dots, g_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

(násobíme dva vektory jako matice a výsledek je jedno číslo).

Pak transpozice je isomorfismem mezi V a V^*. Ale není to přirozený isomorfismus, protože jsme potřebovali souřadnice vektorů a tedy pracovat s nějakou bází prostoru V.

Duál duálu a kanonické vnoření

Napřed uvažme vyhodnocovací zobrazení $ev\colon V \times (V^*) \to \mathbb{T}$ definované jako $ev(v, f) = f(v)$ pro $v \in V$ a $f \in V^*$. Toto zobrazení je lineární v obou proměnných (ověřte).

Toto zobrazení dává přirozenou injekci (prosté zobrazení) z V do V^{**} (pro konečnou dimenzi přirozený isomorfismus). Vektor $v \in V$ zobrazíme na funkci $ev(v, x)$ v jedné proměnné x (kde za x dosazujeme nějaké $f \in V^*$).

Toto je pro konečnou dimenzi přirozený isomorfismus, protože nám nezáleží na volbě báze prostoru V.

Duální zobrazení

Občas uslyšíte označení adjungované zobrazení (anglicky adjoint map).

Definice. *Pro lineární zobrazení $f\colon V \to W$ (V, W nad stejným tělesem) definujeme duální zobrazení $f^*\colon W^* \to V^*$ předpisem $f^*(w^*) = w^* \circ f$.*

Kde $w^* \circ f$ je složení funkcí, tedy výsledkem je funkce, která vezme vektor $v \in V$, zobrazí ho do prostoru W pomocí funkce f a pak na něj provede funkcionál w^*. Je to tedy lineární funkce, která vektoru z V přiřadí číslo z tělesa. Jinak řečeno $(f^*(w^*))(v) = w^*(f(v))$ pro $v \in V$ a $w^* \in W^*$.

Pokud máme lineární zobrazení f reprezentované pomocí matice A (vzhledem k příslušným bázím) a používáme konvenci, že vektory prostoru W^* píšeme jako řádkové, pak matice zobrazení f^* je ta samá a píšeme $f^*(w^*) = w^*A$ (samozřejmě musíme násobit řádkovým vektorem zleva).

Tato konvence dává okamžitě $(f^*(w^*))(v) = w^*Av = w^*(f(v))$.

Poznámka: Pokud bychom psali souřadnice vektorů z W^* do sloupců, pak by zobrazení f^* bylo reprezentované transponovanou maticí zobrazení f (vzhledem k příslušným duálním bázím), tedy maticí A^T a psali bychom $f^*(w^*) = A^T w^*$ (zde ovšem vektor w^* je braný jako sloupcový). Zde bychom ovšem nedostali tak hezkou korespondenci s násobením, protože abychom z vektoru udělali funkcionál, tak bychom napřed museli transponovat, což v minulé konvenci bylo už hotové.

Při zkoušce se držte konvence z přednášky nebo poznamenejte, kterou používáte! Ať vás nespletou případné dotazy zkoušejících.

Literatura

Pro více teorie (se kterou jste se ještě nesetkali a nemá smysl ji zde zavádět) prostudujte skripta “Pěstujeme lineární algebru” (Luboš Motl, Miloš Zahradník). Elektronická verze je dostupná online. Ke skriptům existuje i sbírka příkladů s řešenými příklady mimo jiné i na dualitu. Také je dostupná elektronicky. Pozor jen na mírně odlišné značení.

1. Nechť V je prostor reálných posloupností s jen konečným počtem nenulových prvků, vezměme bázi tohoto prostoru $(1, 0, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, 0, \dots), \dots$.

   (a) Ukažte, že V^* je prostor všech reálných posloupností.

   Řešení: Lineární zobrazení je dané tím, kam zobrazí bázi. Lineární zobrazení f, pro které platí $f((1, 0, 0, 0, \dots)) = \alpha_1, f((0, 1, 0, 0, \dots)) = \alpha_2, f((0, 0, 1, 0, \dots)) = \alpha_3$, ztotožníme s posloupností $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$.

   A naopak posloupnost reálných čísel můžeme ztotožnit se zobrazením. Vidíme tedy, že V^* je prostor všech posloupností reálných čísel (nejen těch s konečným množstvím nenul).

(b) Ukažte, že kanonické vnoření $V \to V^{**}$ není surjekce (tj. není na). Rada: vezměte F lineární zobrazení z V^* do reálných čísel definované

$$F((0,\dots,0,1,0,\dots)) = 0$$

$$F((1,1,1,\dots)) = 1$$

a ukažte, že není v obrazu kanonického vnoření $V \to V^{**}$.

Řešení: Zobrazení F bere posloupnosti reálných čísel (tedy prvky V^*) a přiřazuje jim reálné číslo, tedy máme $F \in V^{**}$.

Ale zobrazení F není obrazem žádného vektoru $v \in V$ při kanonickém vnoření (ev). Kdyby bylo, měli bychom nějaký vektor $v \in V$, pro který $ev(v,f) = f(v) = F(f)$, tedy $0 = ev(v,(1,0,0,0,\dots)) = ev(v,(0,1,0,0,\dots)) = ev(v,(0,0,1,0,\dots)) = \dots$, tedy v je nulový vektor (kdyby někde měl nenulu, pak by příslušná funkce dala také nenulu).

Na druhou stranu jakékoliv lineární zobrazení vyhodnocené v nule je nula a tedy nedostaneme $F((1,1,1,\dots)) = 1$.

10 Cvičení

1. Určete grafy, cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko a inverzní permutace pro permutace $p, q, q \circ p, p \circ q$. Kde $p = [3,4,1,2,6,5], q = [3,4,5,1,6,2]$.

   Řešení: Permutace skládáme jako zobrazení, tedy $(p \circ q)(i) = p(q(i))$.

   Inverze jsou takové páry čísel, že $i < j$, ale permutace jejich pořadí prohodí, tedy $p(j) < p(i)$.

   Pro znaménko složení permutací platí $\operatorname{sgn}(p \circ q) = \operatorname{sgn}(p)\operatorname{sgn}(q)$.

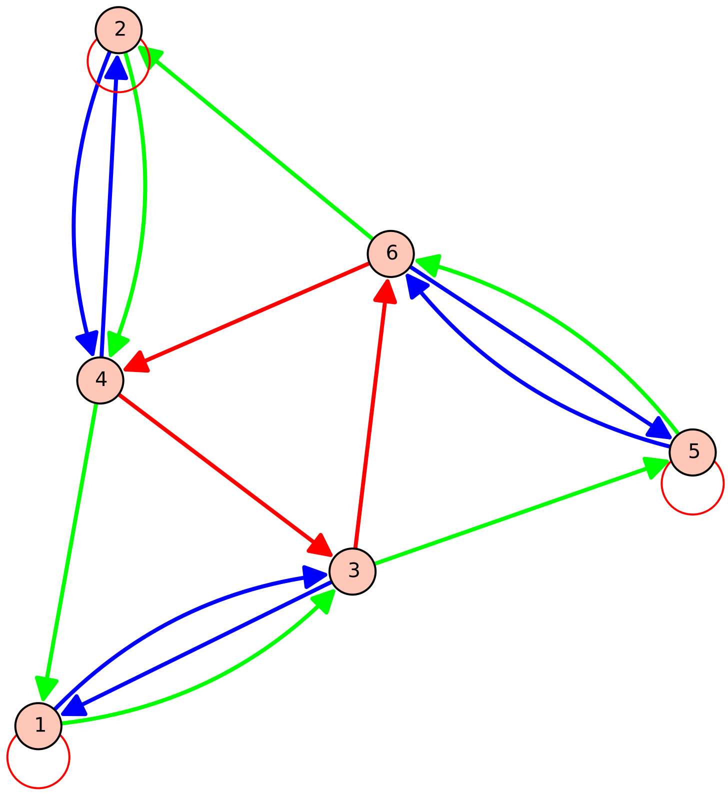
   (a) Permutace p:
   - Permutace je: [3, 4, 1, 2, 6, 5], tedy p(1) = 3, p(2) = 4, p(3) = 1, p(4) = 2, p(5) = 6, p(6) = 5
   - Cykly permutace jsou: (1,3)(2,4)(5,6)
   - Inverze jsou: [(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (5, 6)]
   - Znaménko je: -1 = $(-1)^5$
   - Inverzní permutace je: [3, 4, 1, 2, 6, 5]

   (b) Permutace q:
   - Permutace je: [3, 4, 5, 1, 6, 2], tedy p(1) = 3, p(2) = 4, p(3) = 5, p(4) = 1, p(5) = 6, p(6) = 2
   - Cykly permutace jsou: (1,3,5,6,2,4)
   - Inverze jsou: [(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 6)]
   - Znaménko je: -1 = $(-1)^7$
   - Inverzní permutace je: [4, 6, 1, 2, 3, 5]

   (c) Permutace $p \circ q$:
   - Permutace je: [1, 2, 6, 3, 5, 4], tedy p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 6, p(4) = 3, p(5) = 5, p(6) = 4
   - Cykly permutace jsou: (1)(2)(3,6,4)(5)
   - Inverze jsou: [(3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 6)]
   - Znaménko je: 1 = $(-1)^4$
   - Inverzní permutace je: [1, 2, 4, 6, 5, 3]

   (d) Permutace $q \circ p$:

- Permutace je: [5, 1, 3, 4, 2, 6], tedy p(1) = 5, p(2) = 1, p(3) = 3, p(4) = 4, p(5) = 2, p(6) = 6
- Cykly permutace jsou: (1,5,2)(3)(4)(6)
- Inverze jsou: [(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (3, 5), (4, 5)]
- Znaménko je: $1 = (-1)^6$
- Inverzní permutace je: [2, 5, 3, 4, 1, 6]



Obrázek 11: Permutace $p, q, p \circ q$ odlišené barevně.

2. Přečtěte si začátek kapitoly o determinantech ze skript Milana Hladíka. Hlavně se zaměřte na:

   - definici,
   - počítání determinantů matic 2×2 a 3×3,
   - počítání determinantu trojúhelníkové matice
   - a na to, co se děje s determinantem při ekvivalentních úpravách a jak toho využít k spočítání determinantu větší matice.

   Příští cvičení budeme dále probírat determinanty.

11 Cvičení

1. Počítejte determinanty matic na tabuli.

2. Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $a^T = (1,2,3), b^T = (2,1,1), c^T = (2,3,2)$. (Rovnoběžnostěn v $\mathbb{R}^3$ obsahuje body, které můžeme vyjádřit lineární kombinací $\alpha a + \beta b + \gamma c$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$.)

   Řešení: Objem je rovný determinantu matice, kde vektory a, b, c jsou její sloupce.

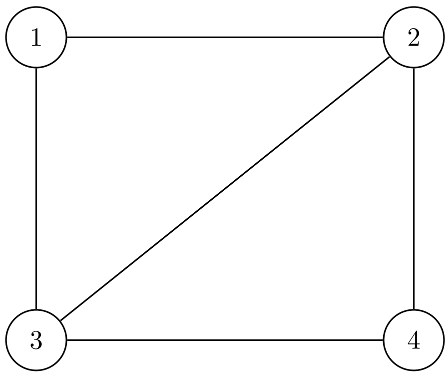
3. Spočítejte objem elipsoidu vzniklého zobrazením koule zobrazením $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, pro které platí: $f((1,3,1)^T) = (3,1,0)^T, f((1,0,3)^T) = (1,0,2)^T, f((4,1,5)^T) = (4,1,5)^T$,

   Řešení: $V(f(B_3)) = |\det({}_K[f]_K)| \cdot 4\pi/3$

4. Užitím Cramerova pravidla spočítejte řešení soustavy rovnic.

5. Vypočtěte inverzní matici pomocí adjungované matice.

6. Spočítejte počet koster grafu (pomocí determinantu a Laplaceovy matice).



   Řešení: Laplaceova matice

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Z ní vyškrtneme první řádek a první sloupec a spočítáme determinant. To je náš výsledný počet koster.