**Příklad 1.** Pekárna peče chleby, housky, bagety a koblihy. K upečení jednoho chleba potřebuje půl kila mouky, 10 vajec a 50 g soli. Na jednu housku je zapotřebí 150 g mouky, 2 vejce a 10 g soli. Na bagetu potřebuje 230 g mouky, 7 vajec a 15 g soli. Na jednu koblihu je třeba 100 g mouky a 1 vejce. Pekárna má k dispozici 5 kilo mouky, 125 vajec, a půl kila soli. Za jeden chleba získá pekárna 20 korun, za housku 2 koruny, za bagetu 10 korun a za koblihu 7 korun. Pekárna se snaží vydělat co nejvíce. Jak ale zjistí kolik chlebů, housek, baget a koblih má upéct?

**Příklad 2** (Maximální vážené párování)**.** Pro zadaný vážený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to \mathbb{R}$, nalezněte maximální párování. Párování je množina hran taková, že každý vrchol je incidentní s maximálně jednou hranou, a váha párování je součet vah všech hran v párování.

**Příklad 3** (Problém batohu)**.** Mějme $k$ předmětů o hmotnostech $h_1, \ldots, h_k$ a batoh o nosnosti $n$. Rozhodněte, které předměty je třeba vložit do batohu, aby jeho nosnost byla maximálně využita, ale nepřekročena.

**Příklad 4** (Souvislost grafu)**.** Rozhodněte, zda daný graf je souvislý.

**Příklad 5** (Klasický dopravní problém I)**.** V Kocourkově je $n$ pekáren a $m$ obchodů. Každý den $i$-tá pekárna upeče $p_i$ rohlíků a $j$-tý obchod prodá $o_j$ rohlíků. Převoz jednoho rohlíku z $i$-té pekárny do $j$-tého obchodu stojí $c_{ij}$ korun. Nalezněte takovou distribuci rohlíků, aby se každá pekárna zbavila všech rohlíků, každý obchod získal (právě) potřebný počet rohlíků a celkové náklady na převoz byly minimální. Zamyslete se nad podmínkami, aby požadováná distribuce vůbec existovala.

**Příklad 6** (Klasický dopravní problém II)**.** Praxe v Kocourkově ukázala, že když $i$-tá pekárna zásobuje $j$-tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí $l_{ij}$. Logistiku $l_{ij}$ je nutné platit pouze tehdy, když $i$-tá pekárna zásobuje $j$-tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné $c_{ij}$.

**Příklad 7** (TSP – Problém obchodního cestujícího)**.** Pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to R$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou. Lze tento problém řešit podobným způsobem jako v příkladě nejkratší cesty (který byste měli znát z přednášky), tj. pro každou hranu $uv$ máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je $\min \sum_{uv\in E} f(uv)x_{uv}$ a pro každý vrchol $u$ máme podmínku $\sum_{uv\in E} = 2$? Vymyslete, jak správně řešit TSP pomocí celočíselného lineárního programování.

**Příklad 8** (Nejkratší cesta do všech vrcholů)**.** Pro daný vážený neorientovaný graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to \mathbb{R}^+$, a jeho vrchol $s$ najděte délku nejkratší cesty do každého vrcholu. Zapište tento problém jako jednu úlohu lineárního programování, jejíž optimální řešení rovnou dá nejkratší vzdálenosti do všech vrcholů z vrcholu $s$. Pořádně dokažte, že optimální řešení vaší úlohy vždy dá správné řešení.

Domácí úkoly - termín odevzdání 14.03.2012

Úkoly odevzdávejte čitelně sepsané, každý na samostaném listu papíru. Nezapomeňte se podepsat.

**Domácí úkol 1** (4 body)**.** Zemědělské družstvo má k dispozici 1200ha orné půdy pro pěstování plodin. Pro půdu v dané oblasti je vhodná pšenice, ječmen, řepka, kukuřice a slunečnice. Řepku není možné pěstovat na více než 250ha půdy a slunečnici není možné pěstovat na více než 500ha půdy. V tabulce naleznete náklady na pěstování 1ha plodin a očekávaný výnos z 1ha. Maximalizujte očekávaný zisk družstva, které má k dispozici rozpočet 750000 Kč. Formulujte lineární program pro výpočet očekávaného maximálního výdělku.

| Plodina | Náklady (100Kč/ha) | Výnosy (1000Kč/ha) |
|---|---:|---:|
| Pšenice | 3 | 2 |
| Ječmen | 4 | 5 |
| Řepka | 6 | 8 |
| Kukuřice | 5 | 6 |
| Slunečnice | 7 | 9 |

**Domácí úkol 2** (10 bodů)**.** Mějme komunikační sít uspořádanou do kružnice s $n$ vrcholy, dále mějme množinu volání $V = \{(i,j)\}$ a $(i,j) \in V$ když $i$ chce volat $j$, $i \leq j$. Každý hovor v síti je třeba spojit, což je možné buď po anebo proti směru hodinových ručiček. Formulujte lineární program, který pro dané $n$ a danou množinu volání $V$ nalezne spojení, které minimalizuje největší přetížení v síti, tj. minimalizuje maximum probíhající komunikace mezi dvěma sousedními uzly.

**Domácí úkol 3** (6 bodů)**.** Pomocí lineárního programu určete počet disjunktních koster grafu $G = (V, E)$. Tedy počet koster, které nesdílejí žádnou hranu.