Příklad 1. Pojďme si zahrát jednu (celkem nebezpečnou) hru pro $n \in \mathbb{N}$ lidí. Postavme všechny do kruhu a určeme prvního. Tento první dostane dýku a pomocí této dýky zabije svého kolegu stojícího po směru (imaginárních) hodinových ručiček (pro daný hruh jako hodinky). Poté podá dýku ve směru hodinových ručiček (tedy ne tomu mrtvému, ale jeho sousedovi, který přežil). Každý kdo má dýku opakuje stejnou akci jaká byla popsána výše. Na konci zbyde jeden člověk, který řekněme vyhrál. Uměli byste určit kam si máte stoupnout mezi $n-1$ lidí, abyste přežili?

Příklad 2. Buď $G = (V, E)$ graf a dále nechť $z \in V$ je nějaký (pevný) vrchol. Definujme na V relaci R předpisem $(u, v) \in R$ právě když vzdálenost mezi z a u je stejná jako mezi z a v. Jakou relaci jsme to vytvořili? Má nějaký grafový význam? Jak vzhledem k této relaci vypadá graf G „chytneme-li“ ho za vrchol z?

Příklad 3. Dokažte, že bipartitní grafy jsou právě grafy bez lichých kružnic.

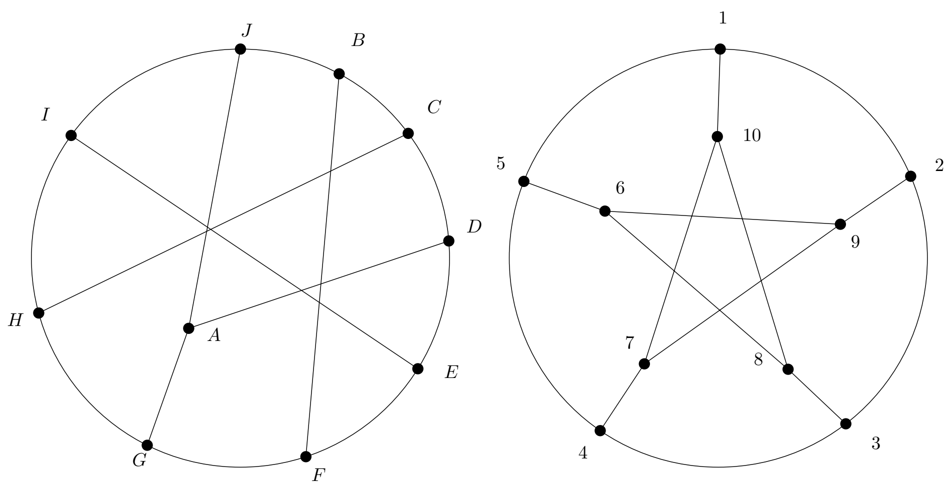
Příklad 4 (Boolovské mřížky)**.** Boolovská mřížka $BL_n, n \geq 1$ je graf, jehož množina vrcholů je množina všech podmnožin množiny $[n]$ a dvě množiny jsou spojeny hranou, právě když jejich symetrická diference obsahuje právě jeden prvek (tedy $|X \Delta Y| = 1$).

1. Nakreslete si BL_1 a BL_2.
2. Určete $|V(BL_n)|$ a $|E(BL_n)|$.
3. Dokažte, že pro libovolné n je BL_n bipartitní graf.

Příklad 5. Ukažte, že když graf G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, potom G obsahuje (nějaký) lichý cyklus jako indukovaný podgraf.

Příklad 6. Ukažte, že pro souvislý graf, který má všecny stupně sudé nemůže obsahovat most (tj. takovou hranu, jejímž odebráním z grafu, by se tento rozpadl na dvě komponenty souvislosti).

Příklad 7. Nalezněte izomorfismus grafů na obrázku:



Definice 1 (Doplněk grafu)**.** Buď $G = (V, E)$ graf. Potom doplňkem G je graf $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ (tj. graf na nehranách původního grafu G).

Příklad 8. Ukažte, že dva grafy jsou izomorfní, právě když jsou jejich doplňky izomofrní.

Příklad 9. Najděte všechny grafy, které neobsahují cestu délky dva jako (indukovaný) podgraf.

Příklad 10 (Párty)**.** Na večírek dorazilo n lidí a někteří z nich si přátelsky potřasli pravicemi, jiní (z neznámého důvodu ne). Dokažte, že na konci večera existují dva účastníci večírku, kteří si potřásli pravicí se stejným počtem lidí (ne nutně se stejnými osobami).

Pokyny k vypracování úkolů

Pořádně si přečtěte zadání (a pak ještě jednou to z webu – častokrát opravené). Pokud vám cokoli nedává smysl nebo nevychází jak by mělo, ozvěte se (může se jednat o překlep v zadání)!
Své řešení sepisujte **čitelně, komentovaně, úhledně a v ideálním případě i správně**. Rozhodně neopisujte cizí řešení (nic se tím nenaučíte). Řešení kolektivů je ale zcela v pořádku (pokud si jej následně každý sepíše sám) a je zcela podporováno. Pokud používáte znalosti ze cvičení či přednášky, odkažte se na příslušný zdroj.

z minula

Úkol 1 (4 body)**.** Automat (například si představte automat na kávu) přijímá korunové nebo dvoukorunové mince. V automatu je na začatku 0 korunových mincí. Pokud zákazník vhodí dvoukorunovou minci, automat se mu *pokusí* vrátit, pokud to není možné, automat se zasekne. Kolika způsoby je možné seřadit m zákazníků s korunovou mincí a n zákazníků s dvoukorunovou mincí tak, aby se automat nezasekl, když jej zákazníci navštíví v tomto pořadí?

Úkol 2 (4 body)**.** Kolik existuje permutací π množiny $[n]$, které nejsou involuce? Involuce je permutace, která je sama sobě inverzí, tj. $\pi \circ \pi = id$.

Úkol 3 (3 body)**.** Postavme $2n$ lidí do kruhu. Kolika způsoby si může n dvojic zároveň podávat ruce tak, aby se nedostali do neslušné situace – tedy aby se žádným dvěma dvojicím nestalo to, že by se křížily jejich ruce.

Úkol 4 (6 bodů)**.** Sečtěte následující řady:

1. $\sum_{0\leq i\leq n} \binom{n}{i}^2$,
2. $\sum_{0<i\leq n} \binom{n}{i} i^3$.