Příklad 1. Kolika způsoby můžeme postavit do řady osm rotvajlerů a pět kníračů, pokud žádní dva knírači nesmí stát vedle sebe?

Příklad 2. Kolika způsoby lze seřadit do fronty pět Čechů, čtyři Slováky a tři Maďary, pokud všichni příslušníci žádného národa nesmí tvořit souvislý úsek? Co kdybychom je chtěli za stejných podmínek rozesadit ke kulatému stolu?

Příklad 3. Určete počet všech zobrazení z $[m]$ do $[n]$. Kolik je zobrazení z $[m]$ na $[n]$?

Příklad 4. Kolik čisel zbyde v množině [100] po vyškrtání násobků čísel

1. 3, 5 a 7,
2. 4, 6 a 9?

Příklad 5. Pan profesor zjistil, že stejné konference se účastní pět jeho přátel. Z těchto pěti lidí potká během konferenčních večeří každého jednotlivce desetkrát, každou dvojici pětkrát, každou trojici třikrát, každou čtveřici dvakrát a celou pětici jednou. Kolik dní trvala konference?

Příklad 6. Hostitel pořádá po sedm večerů večeři pro sedm svých přátel. Na každou večeři však pozve jen tři z nich. Kolika způsoby může hostitel přátele pozvat tak, že se během týdne všichni vystřídají?

O šatnářce Připomeňme, že $\check{s}(n)$ je funkce udávající počet permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ bez pevného bodu.

Příklad 7. Určete počet permutací s právě jedním pevným bodem.

Příklad 8. Dokažte vztah

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

A rekurentní vztah

$$\check{s}(n) = (n-1)[\check{s}(n-1) + \check{s}(n-2)].$$

Příklad 9. Kolik je permutací množiny $[n]$, které mají jen cykly délky 2?

Příklad 10. Kolik je cest na šachovnici $n \times n$, které neprotínají diagonálu?

Pokyny k vypracování úkolů

Pořádně si přečtěte zadání (a pak ještě jednou to z webu – častokrát opravené). Pokud vám cokoli nedává smysl nebo nevychází jak by mělo, ozvěte se (může se jednat o překlep v zadání)!
Své řešení sepisujte **čitelně, komentovaně, úhledně a v ideálním případě i správně**. Rozhodně neopisujte cizí řešení (nic se tím nenaučíte). Řešení kolektivů je ale zcela v pořádku (pokud si jej následně každý sepíše sám) a je zcela podporováno. Pokud používáte znalosti ze cvičení či přednášky, odkažte se na příslušný zdroj.

Úkol 1 (3 body)**.** Kolik existuje pořadí písmen A, B,. . . , P z nichž vypuštěním některých písmen nelze dostat ani jedno ze slov PONK, DOBA a COP? A co kdybychom zakázali ještě slovo OPICE?

Úkol 2 (3 body)**.** Určete počet neklesajících zobrazení z $[m]$ do $[n]$.

Úkol 3 (4 body)**.** Karetní balíček obsahuje celkem 52 karet (čtyři barvy, každá po 13 kartách).

1. Kolika způsoby lze vybrat z balíčku třináct karet tak, aby mezi nimi byly karty všech barev? Nezáleží na pořadí karet v ruce.
2. Kolika způsoby lze rozdat karty čtyřem hráčům ABCD tak, aby každý hráč dostal 13 karet? Opět nezáleží na pořadí karet.
3. Kolika způsoby lze rozdat karty jako v bodě 2., pokud navíc chceme, aby hráč A měl od každé barvy alespoň jednu kartu?

Úkol 4 (3 body)**.** Buď R relace na množině X. Dokažte, že $R \cap R^{-1} = \Delta_X$ (diagonální relace), právě když R je reflexivní a antisymetrická.

Úkol 5 (6 bodů)**.** Kolika různými způsoby lze ke kulatému stolu posadit r Rusů, n Němců a b Bulharů tak, aby příslušníci žádného národa netvořili souvislý úsek? Předpokládejte, že všichni jsou navzájem rozlišitelní, **naopak** rozsazení lišící se pouze pootočením stolu považujeme za stejná.