Příklad 1. Kolika způsoby lze rozesadit do coupé (4 místa ve směru jízdy a 4 místa proti směru jízdy) osm lidí, z nichž 2 chtějí sedět pouze po směru a 3 pouze proti směru jízdy a ostatním je to jedno? A co kdyby na nádraží nedorazil jeden člověk vyžadující sezení po směru a jeden člověk vyžadující sezení v protisměru jízdy vlaku?

Příklad 2. Kolik existuje různých řešení $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ rovnice $x_1 + \cdots + x_n = m$, řekněme pro $n \leq m \in \mathbb{N}$. A co kdybychom chtěli $x_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?

Příklad 3. Kolik existuje uspořádaných dvojic (A, B) takových, že $A \subseteq B \subseteq [n]$?

Příklad 4. Kolik existuje 3-ciferných čísel tvořený číslicemi z množiny $\{1, 3, 5, 8, 9\}$ bez/s opakování/m? Jaký je součet všech takových čísel?

Příklad 5. Nalezněte (a dokažte) vzoreček pro $\sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2}$.

Příklad 6. Nalezněte (a dokažte) vzoreček pro $\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r}$.

Příklad 7. Určete počet všech/neklesajících zobrazení z $[m]$ do $[n]$.

Příklad 8. Kolik čisel zbyde v množině [100] po vyškrtání násobků čísel

1. 3, 5 a 7,
2. 4, 6 a 9?

Příklad 9. Kolika způsoby můžeme postavit do řady osm rotvaülerů a pět kníračů, pokud žádní dva knírači nesmí stát vedle sebe?

Příklad 10. Ukažte, že $\sum_{i \in [n]} (-1)^i \binom{n}{k} = 0$.

Příklad 11. Hostitel pořádá po sedm večerů večeři pro sedm svých přátel. Na každou večeři však pozve jen tři z nich. Kolika způsoby může hostitel přátele pozvat tak, že se během týdne všichni vystřídají?

Příklad 12. Pan profesor zjistil, že stejné konference se účastní pět jeho přátel. Z těchto pěti lidí potká během konferenčních večeří každého jednotlivce desetkrát, každou dvojici pětkrát, každou trojici třikrát, každou čtveřici dvakrát a celou pětici jednou. Kolik dní trvala konference?

Příklad 13. Kolika způsoby lze seřadit do fronty pět Čechů, čtyři Slováky a tři Maďary, pokud všichni příslušníci žádného národa nesmí tvořit souvislý úsek?

Pokyny k vypracování úkolů

Pořádně si přečtěte zadání (a pak ještě jednou to z webu – častokrát opravené). Pokud vám cokoli nedává smysl nebo nevychází jak by mělo, ozvěte se (může se jednat o překlep v zadání)!
Své řešení sepisujte **čitelně, komentovaně, úhledně a v ideálním případě i správně**. Rozhodně neopisujte cizí řešení (nic se tím nenaučíte). Řešení kolektivů je ale zcela v pořádku (pokud si jej následně každý sepíše sám) a je zcela podporováno. Pokud používáte znalosti ze cvičení či přednášky, odkažte se na příslušný zdroj.

Úkol 1 (2 body)**.** Kolik existuje uspořádaných

1. dvojic (A, B) takových, že $A, B \subseteq [n]$ a $|A \cap B| = 1$?
2. čtveřic (A, B, C, D), kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq [n]$ a zároveň $A \subseteq C \subseteq D$?

Úkol 2 (1 body)**.** Nalezněte a dokažte vzoreček pro

$$\sum_{i=\lceil r/2 \rceil}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{2i}{r}.$$

Úkol 3 (5 bodů)**.** Na cvičeních jsme si ukazovali binomickou větu ve zdánlivě jednodušší podobě než na přednášce. Hledali jsme vzorček pro $(1 + x)^n$ namísto hledání vzorečku pro $(x + y)^n$. Rozmyslete si (čtěte dokažte), že ze znalosti vzorečku ze cvičení logicky vyplývá vzoreček obecný z přednášky.

Úkol 4 (1 bod)**.** Je možné dolní celou část vyjádřite pomocí horní celé časti a opačně? Jak je možné pomocí dolní celé časti zaokrouhlovat?

Úkol 5 (6 bodů)**.** Pro $r, m, n \in \mathbb{N}$ a $r \leq m \leq n$ dokažte:

1. $$\binom{m+n}{r} = \sum_{i \in [r]} \binom{m}{i} \binom{n}{r-i},$$

2. $$\binom{m+n}{r} = \sum_{i \in [r]} \binom{n}{i} \binom{m}{r-i},$$

3. $$\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}.$$