Příklad 1. Pro bipartitní graf popřípadě obecný graf nalezněte perfektní párování minimální ceny.

Příklad 2. Nalezněte fasety polytopu zadaného jako $P = \{x \in \mathbb{Z}^4 | x, y \geq 0,\ x \leq 3.5,\ -\frac{3}{2}x + 2y \leq 8,\ x + \frac{3}{2}y \leq \frac{41}{4}\}$.

Definice 1. Buď S neprázdná konečná množina, dále nechť $\mathcal{I} \subseteq 2^S$, který splňuje:

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(I2) jestliže $I \in \mathcal{I},\ J \subset I$, potom $J \in \mathcal{I}$,

(I3) jestliže $I, J \in \mathcal{I}$ a $|I| < |J|$, potom $\exists x \in J \setminus I \colon I \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Potom nazveme $(S, \mathcal{I})$ matroid.

Příklad 3. Ukažte, že pro $I, J \in \mathcal{I}$ maximální (co do $\subseteq$) platí $|I| = |J|$.

Příklad 4. Rozhodněte, zda následující je matroid:

a $(E, \mathcal{F})$, kde E je množina hran grafu G a $\mathcal{F}$ je množina všech jeho acyklických podgrafů,

b $(A, \mathcal{C})$, kde A je matice a $\mathcal{C}$ je množina množin lineárně nezávislých sloupců matice A,

c $(E, \mathcal{M})$ kde E je množina hran grafu G a $\mathcal{M}$ jsou všechna jeho párování,

d $(M, \mathcal{I}_k)$, kde M je množina a $\mathcal{I}_k = \binom{M}{m}$ pro $m = 0, 1, \ldots, k$.

Příklad 5. Dokažte, že nahrazením pravidla (I3) konsequentem přikladu 3 dostaneme ekvivalentní koncept.

Příklad 6. Buď $r : 2^S \to \mathbb{N}$ funkce, pro kterou platí:

(r1) $r(\emptyset) = 0$,

(r2) $r(\aleph) \leq |\aleph|$ pro všechna $\aleph \subseteq S$.

(r3) $r(U) + r(V) \geq r(U \cup V) + r(U \cap V)$ pro všechna $U, V \subseteq S$.

Nechť dále je $\mathcal{I} = \{U \subseteq S | r(U) = |U|\}$. Potom $(S, \mathcal{I})$ je matroid.

Příklad 7. Ukažte, že platí pro matroid existuje funkce r splňující (r1), (r2), (r3).

Domácí úkoly – termín odevzdání před poslední přednáškou

Definice 2 (Degenerované řešení)**.** Bazické řešení x lineárního programu $\min c^T x, Ax = b, x \geq 0$ s maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nazveme degenerované, pokud x obsahuje více než $m - n$ koordinátů s hodnotou 0.

Domácí úkol 1 (10 bodů)**.**

(a) Ukažte, že když má lineární progam ve tvaru $\min c^T x, Ax = b, x \geq 0$ optimální řešení, ale žádné degenerované řešení, potom má duální problém jednoznačné řešení.

(b) Uvažme, že LP ve stejném tvaru jako v předchozí části má degenerované optimální řešení. Je potom řešení duálního problému nutně nejednoznačné? Pokud ano, dokažte to, pokud ne, nalezněte protipříklad.

Domácí úkol 2 (5 bodů)**.** Buď $(S, \mathcal{I})$ matroid, definujme celočíselný polytop v $\mathbb{R}^{|S|}$ předpisem

$$P = \{x \in \mathbb{R}^{|S|} : \exists b_1, ..., b_k \text{ baze } (S, \mathcal{I}), x \text{ je konvexní kombinací } b_1, ..., b_k\}.$$

Označme A matici polytopu P, tedy $P = \{x \in \mathbb{R}^{|S|} | Ax \leq b\}$. Rozhodněte (a dokažte nebo nalezněte protipříklad) zda je či není matice A totálně unimodulární.

Domácí úkol 3 (5 bodů)**.** Buď (V, E) graf a $s, t \in V$ dva jeho různé vrcholy, dále nechť každá hrana má kapacitu 1 a nechť je pro každou hranu dána její cena $c(e) \in \mathbb{Z}$. Ukažte, že pomocí lineárního programování lze nalézt celočíselný přípustný tok mezi s a t velikosti $d \in \mathbb{N}$ s minimální ceny nebo prokázat, že žádný tok velikosti d mezi s a t v grafu neexistuje.