Příklad 1 (Stále relace)**.** Mějme graf $G = (V, E)$ a definujme relaci R na V tak, že $(u, v) \in R$ právě když $u, v \in E$ (tedy dva vrcholy jsou v relaci, pokud jsou spojeny hranou). Jaká tato relace je? Jaká je pro speciální grafy? Platí, že relace $\bar{R}$ je relace na nehranách grafu G?

Příklad 2 (O souvislosti)**.** Ukažte, že relace "být spojený sledem (cestou)" v grafu je reflexivní, symetrická a tranzitivní a není anti-symterická.

Příklad 3 (Párty)**.** Na večírek dorazilo n lidí (matfyzáků) a někteří z nich si přatelsky potřásli pravicemi, jiní (z neznámého důvodu) ne. Dokažte, že na konci večera existují dva lidé (účastníci večírku), kteří si potřásli pravicí se stejným **počtem** lidí.

Řešení. This can be shown using the pigeon hole principle. Assume that the graph has n vertices. Each of those vertices is connected to either 0, 1, 2, . . . , n ? 1 other vertices. If any of the vertices is connected to n ? 1 vertices, then it is connected to all the others, so there cannot be a vertex connected to 0 others. Thus it is impossible to have a graph with n vertices where one is vertex has degree 0 and another has degree n ? 1. Thus the vertices can have at most n ? 1 different degrees, but since there are n vertices, at least two must have the same degree.

Příklad 4 (DCV 1)**.** Buď $\mathcal{G}$ nějaká množina (lépe řečeno třída) grafů. Dokažte, že relace "být isomorfní" je ekvivalence na $\mathcal{G}$.

Příklad 5. Ukažte, že kružnice (C_n) je bipartitní právě když n je sudé.

Příklad 6 (Boolovská mřížka)**.** Boolovská mřížka BL_n, $n \geq 1$ je graf, jehož množina vrcholů je množina všech podmnožin $[n]$ a dvě množiny X a Y jsou spojeny hranou, právě když jejich symetrická diference obsahuje právě jeden prvek (tedy $|X \Delta Y| = 1$).

a) Nakraslete BL_1, BL_2, BL_3.

b) Kolik vrcholů má BL_n?

c) Kolik hran má BL_n?

d) Dokažte, že BL_n je bipartitní graf pro všechna $n \geq 1$.

Příklad 7 (DCV 2)**.** V automatu stojí káva přesně 1 Kč. Přijímá jednokorunové a dvoukorunové mince. Pokud zákazník vhodí 2 Kč, automat se mu pokusí jednu korunu ze zásobníku vrátit. Pokud tam ale žádná není, automat se zasekne a musí přijít technik ho opravit. Automat má na začátku prázdný zásobník. S jakou pravděpodobností se nezasekne, jestliže ho navštíví v náhodném pořadí n zákazníku s 1 Kč a m[1] zákazníků s 2 Kč?

Příklad 8. Dokažte, že složení dvou permutací je permutace.

Příklad 9. Mějme Hasseův diagram pro přirozená čísla $\mathbb{N}$ uspořádaná dělitelností. Určete, jaký počet čar vede zespodu do čísla k. Jinými slovy, kolik má číslo k předchůdců v uspořádání dělitelností.

[1] Pomůže-li vám to, předpokládejte $n = m$