

## Definice

**Definice** (Isomorfismus grafů). Buďte  $G = (V, E), H = (W, F)$  dva grafy. Zobrazení  $f : V \rightarrow W$  se nazývá *izomorfismus*, pokud je bijektivní a  $\forall u, v \in V$  platí, že  $\{f(u), f(v)\} \in F$  právě když  $\{u, v\} \in E$ .

**Definice.** Řekneme, že graf je *souvislý*, pokud je neprázdný a mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta.

## Příklady

**Příklad 1.** Určete minimální a maximální počet hran grafu na  $n$  vrcholech s právě  $k$  komponentami souvislosti.

**Příklad 2.** Dokažte, že dva grafy jsou izomorfní právě tehdy, když jsou izomorfní jejich doplňky.

**Příklad 3.** Ukažte, že eulerovský graf je disjunktním sjednocením kružnic.

**Příklad 4.** Dokažte, že každý graf má alespoň 2 vrcholy stejného stupně.

**Příklad 5.** Dokažte, že každé dvě nejdelší cesty v souvislém grafu mají společný vrchol.

**Příklad 6.** Dokažte, že pro každý graf  $G = (V, E)$  platí:

$$c(G) + |E| \geq |V|,$$

kde  $c(G)$  označuje počet komponent souvislosti grafu  $G$ .

**Příklad 7.** V úkolu jste dokázali, že pokud je graf  $G$  souvislý, potom existují dva různé vrcholy  $u, v$  takové, že  $G - u, G - v, G - u, v$  jsou souvislé grafy (pokud ne, tak nyní).

Rozhodněte, zda platí i obrácená implikace (a máme tedy alternativní charakterizaci souvislosti).

**Příklad 8.** Nalezněte pro libovolné  $n$  souvislý graf s  $n \geq 10$  vrcholy, který obsahuje sudou kružnici jako podgraf, ale ne jako indukovaný podgraf.

Dejte lepší odhad na minimální možné  $n$ .

**Příklad 9.** Ukažte, že každá kostra obsahuje všechny mosty.

**Úkol 1** (2 body). Mějme graf, jehož vrcholy jsou tvořeny binárními slovy délky  $k$ . Dva vrcholy jsou spojeny hranou, pokud je odpovídající slova liší v právě dvou pozicích, nebo ve všech pozicích.

V závislosti na  $k$  rozhodněte, zda je takovýto graf eulerovský.

**Úkol 2** (3 body). Kouzelník provádí následující trik. Má běžný karetní balíček obsahující 52 karet (tedy 13 od každé barvy). Náhodný divák z publika si náhodně vybere 5 karet a předá je kouzelníkově asistenci. Asistentka poté kouzelníkovi ukáže 4 z těchto karet, kouzelník pak následně pomocí svých magických schopností řekne, která karta je ta pátá (tu si nechala asistentka).

Ukažte, že v tomto triku není nic magického.