## Věty a definice

**Definice 1** (Zobrazení)**.** Buďte $X$ a $Y$ konečné možiny. Zobrazení z $X$ do $Y$ je relace $R \subseteq X \times Y$ taková, že prokaždé $x \in X$ platí, že existuje právě jedno $y \in Y$ a $(x, y) \in R$.

**Definice 2** (Typy relací)**.** Řekneme, že relace $R$ na množině (konečné) $X$ je

**reflexivní** pokud pro každé $x \in X$ platí $xRx$,

**symetrická** pokud kdykoli $(x, y) \in R$ tak také $(y, x) \in R$,

**slabě anti-symetrická** pokud $(x, y), (y, x) \in R$ implikuje že $x = y$,

**tranzitivní** pokud kdykoli $(x, y), (y, z) \in R$ tak také $(x, z) \in R$.

**Definice 3** (Skládání relací)**.** Buďte $X, Y, Z$ množiny, $R$ relace mezi $X$ a $Y$ a $S$ relace mezi $Y$ a $Z$. Složní relací $R \circ S$ je relace $\{(x, z)\colon \text{existuje } y \in Y (x, y) \in R \text{ a } (y, z) \in S\}$.

## Přiklady

**Priklad 1.** Uvažme relaci "$x$ dělí $y$"na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Dokažte, že se jedná o uspořádání.
2. Má toto uspořádání největší/nejmenší prvek?
3. Má toto uspořádání maximální/minimální prvek?

**Priklad 2.** Buďte $R, S$ uspořádání. Ukažte, že $R \cap S$ je uspořádání. Pokud by dělalo problémy, uvažte $R \cap R$.

**Priklad 3.** Určete počet řešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ takových, že $0 \leq x_i \leq n$ a $x_i \in \mathbb{N}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$.

**Priklad 4.** Ukažte, že každé uspořádání na konečné množině je možné napsat jako průnik konečně mnoha lineárních uspořádání.

**Priklad 5.** Určete počet dvojic $(A, B)$ splňujících $A \subseteq B \subseteq [n]$ v závislosti na $n$.

**Priklad 6.** Určete počet čtveřic $(A, B, C, D)$ splňujících $A \subseteq B \subseteq D \subseteq [n]$ a zároveň $A \subseteq C \subseteq D$ v závislosti na $n$.

**Priklad 7.** Ukažte, že

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Priklad 8.** Ukažte, že pro každé přirozené číslo $n$ existuje množina $K$, že je možné zapsat ve tvaru $n = \sum_{k \in K} F_k$, kde $F_k$ je $k$-té Fibonacciho číslo.

## Úkoly

**Úkol 1** (1 bod)**.** Uvažme mřížku $m \times n$ ($m$ značí počet vertikálních a $n$ počet horizontálních čar). Kolik existuje obdélníků, které mají strany na této mřížce v závislosti na $m$ a $n$?

**Úkol 2** (2 body)**.** Ukažte, že relace $R$ je tranzitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$.
Ukažte, že pokud $R$ je tranzitivní a reflexivní relace, potom $R^2 = R$.

**Úkol 3** (2 body)**.** Sečtěte sumu

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k).$$