Relace užité v Lineární algebře

Ukážeme si společne jedno velice pěkné aplikační spojení Diskrétní matematiky a Lineární algebry.

Uvažujme vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{F}$. Dále pak buď U vektorový podprostor V. Definujme relaci $\sim$ následujícím předpisem. Pro vektory $u, v \in V$ platí $u \sim v$ právě když $u + (-v) \in U$. Tedy dva vektory jsou v relaci, pokud jejich rozdíl padne do prostoru U.

Úkol 1 Ukažte, že relace $\sim$ je ekvivalencí na množině V.

Úkol 2 Ukažte, že U samo tvoří jednu ze tříd ekvivalence $\sim$.

Výbroně. Nyní máme ekvivalenci a její třídy. Označme si proto v dalším textu $\mathcal{T}$ právě třídy ekvivalence $\sim$. A protože jsme začali s vektorovými prostory, tedy strukturami, kde je přirozené počítat, podívejme se, jak se chovvá toto, pro vektory přirozené, počítání vzhledem k systému $\mathcal{T}$.

Úkol 3 Ukažte, že pro každé dvě třídy $T, T' \in \mathcal{T}$ existuje právě jedna třida ekvivalence $\overline{T} = T(T, T') \in \mathcal{T}$ taková, že pro libovolné dva vektory $t \in T$ a $t' \in T'$ platí, že $t + t' \in \overline{T}$.

Toto zadání je trochu těžkopádné, protože obsahuje mnoho střídajících se kvantifikátorů, proto je dobré se ještě před jeho dokazováním zamyslet nad tím, co vlastně říká. Říká, že vybereme-li se nějaké dvě třídy ze systému $\mathcal{T}$, pak již nezáleží na tom, jaké si v nich zvolíme vektory a výsledek jejich součtu vždy padne do stejné (jednoznačně určené) třídy ekvivalence.

Ještě mi dovolte podotknout, že důkaz tohoto cvičení je snadný, pokud je veden sporem. Zkuste tedy předpokládat, že existují dva možné výsledky onoho sčítání (zbytek by neměl být nepodobný napříkald důkazu o neexistenci dvou nul v tělese).

Úkol 4 Ukažte dále, že pro třídu $T \in \mathcal{T}$ a třídu (vektorový prostor) U, pro libovolné $t \in T$ a libovolné $u \in U$ platí, že $t + u \in T$.

Všimněte si, co jsme nyní dokázali. Poslední dva úkoly nás naučily, že pokud nás nezajímá výsledek přesný, ale pouze do jaké třídy výsledek padne, je možné vybrat *libovolné repezentanty*, protože nezáleží na jejich volbě (to bylo obsahem úkolu). Dále jsme se dozvěděli, že pro naší speciální třídu U víme výsledek okamžit. Toto by nás nemělo po předchozím cvičení překvapit, neboť U obsahuje výborného reprezentanta—konkrétně nulový vektor celého prostoru V.

Z tohoto vidíme, že bychom mohli definovat sčítání nad třídami jednoduchým (ale dle předchozího platným) předpisem pomocí reprezentantů. Toto by nám mělo znít povědomně, protože se právě nacházíme ve strukturách, kde je sčítání zcela přirozené (vetorových prostorech). Vše by jistě bylo ještě přirozenější, pokud bychom mohli podobný výsledek dokázat i o násobení skalárem, tedy prvkem tělesa $\mathbb{F}$.

Úkol 5 Ukažte, že pro libovolnou třidu $T \in \mathcal{T}$ a libovolné $\alpha \in \mathbb{F}$ existuje právě jedna třida $\overline{T} = T(T, \alpha) \in \mathcal{T}$ taková, že pro libovolné $t \in T$ náleží vektor $\alpha \cdot t$ do třídy $\overline{T}$.

Tímto jsme ale dokázali, že pokud se odprostíme od samotných vektorů—ponecháme pouze reprezentanty, třídy ekvivalence $\sim$, je možné se bavit o sčítání i o násobení skalárem z tělesa $\mathbb{F}$. No nepřipomíná to néjakou definici? Ano, jistě už je to sokoro vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Ale nepředbíhejme, zbývá nám ještě jeden bod k ověření!

Úkol 6 Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{F}$ a pro libovolné $T, T' \in \mathcal{T}$ platí, že existuje právě jedno $\overline{T} = T(\alpha, T, T') \in \mathcal{T}$ takové, že $\alpha(t + t') \in \overline{T}$ a zárovneň $\alpha t + \alpha t' \in \overline{T}$.

Nyní jsme opravdu oprávněni vyslovit následující tvrzení.

Důsledek Systém $\mathcal{T}$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$.

Povšimněte si, že výše uvedené tvrzení by se vám na začatku zdálo jen stěží uvěřitelné a pokud byste jej měli dokázat, zcela by nebylo zřejmé, jak by se takový důkaz mohl udělat. Navíc, by prakticky nikdo nesáhl po relacích jako po prvním nástroji takového důkazu.

Pojďme ale ještě o trochu dále. Relace $\sim$ nám v tomto velice pomohla, protože jsme si ji chytře zavedli. To byl vlastně asi nejtěžší krok celého důkazu, tedy právě ten, který vyžadoval obrovský vhled do dané situace. Všimněte si, že se nám vlastně podařilo ukázat, že se ekvivalence $\sim$ *chová dobře* vzhedem k původním operacím definovaným na vektorovém prostoru V.

Pokud se více zamyslíme nyní nad strukturou vektorového prostoru $\mathcal{T}$ zjistíme, že jsme se po cestě k důkazu tohoto faktu naučili i to, že roli nulového vektoru v tomto prostoru hraje celý vektorový prostor U. Zamysleme se nyní ještě nad dimenzemi. Prostor U měl původně nějakou dimenzi, ale tu zavedením relace $\sim$ ztratil, protože se nadále chová jako nulový vektor a tedy prostor dimenze 0. Pojďme se nyní přesvědčit, že žádné další dimenze se nám nemohly tímto postupen ztratit!

Úkol 7 Ukažte, že platí rovnost $\dim(U) + \dim(\mathcal{T}) = \dim(V)$.