5. přednáška 1. listopadu 2005

1.6. Úplné metrické prostory. Metrický prostor (M, d) je *úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost v M je konvergentní, tj. má limitu $a \in M$.

Příklady. 1. Jak víme z Matematické analýzy I, $\mathbf{R}$ je úplný metrický prostor. Jeho podprostory $(0, 1]$ a $\mathbf{Q}$ (množina zlomků) úplné nejsou, podprostor $[-5, \infty)$ úplný je. Podobně $\mathbf{R}^n$ s euklidovskou metrikou je úplný.

2. Z Matematické analýzy II zase víme, že $C[a, b]$ s maximovou metrikou je úplný. (Cauchyovská posloupnost funkcí z $C[a, b]$ stejnoměrně konverguje k nějaké funkci z $C[a, b]$.) Pokud ale $C[a, b]$ vybavíme integrální metrikou, nedostaneme úplný prostor. Vezměme $a = -1, b = 1$ a posloupnost funkcí (f_n) definovanou jako

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } -1 \leq x \leq -n^{-1} \\ nx & \text{pro } -n^{-1} \leq x \leq n^{-1} \\ 1 & \text{pro } n^{-1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Patrně $(f_n) \subset C[-1, 1]$ a (f_n) je cauchyovská posloupnost, protože pro $m \leq n$ máme

$$d(f_m, f_n) = \int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)| \, dx \leq \int_{-1/m}^{1/m} 1 \, dx = 2/m.$$

Neexistuje však funkce $f \in C[-1, 1]$, pro níž by $f_n \to f$. Taková funkce f by totiž, podle definice funkcí f_n, musela být identicky -1 na intervalu $[-1, 0)$ a identicky 1 na intervalu $(0, 1]$, což je (pro spojitou funkci) nemožné.

3. Kompaktní metrický prostor je podle věty 8 vždy úplný. Naopak to obecně neplatí, $\mathbf{R}$ je úplný a nekompaktní metrický prostor.

4. Uvažme euklidovské metrické prostory $\mathbf{R}$ a $(-\pi/2, \pi/2)$ a bijekci

$$f(x) = \arctan(x) : \ \mathbf{R} \to (-\pi/2, \pi/2).$$

Je to homeomorfismus, protože f i inverz $f^{-1}(x) = \tan(x) : \ (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$ jsou spojitá zobrazení; f je dokonce stejnoměrně spojité. Prostory $(-\pi/2, \pi/2)$ a $\mathbf{R}$ jsou tedy nerozlišitelné jako topologické prostory. (Prakticky stejný příklad jsme uvedli na druhé přednášce.) Ovšem $\mathbf{R}$ je úplný metrický prostor, ale $(-\pi/2, \pi/2)$ nikoli. Je to způsobeno tím, že inverz f^{-1} není stejnoměrně spojitý. Uvidíme, že pokud navíc ve stejnoměrně spojitém homeomorfismu mezi metrickými prostory je i inverz stejnoměrně spojitý, pak úplnost jednoho prostoru už vynucuje úplnost druhého.

Věta 16. *Úplnost metrického prostoru se zachovává třemi operacemi.*
1. *Přechod k uzavřenému podprostoru.*
2. *Obraz prostým zobrazením f, pokud f i f^{-1} je stejnoměrně spojité.*
3. *Kartézský součin.*

Důkaz (nebyl na přednášce). 1. Nechť (M, d) je úplný metrický prostor. Pak dokonce platí ekvivalence

$$E \subset M \text{ je uzavřená množina } \iff \text{ podprostor } (E, d) \text{ je úplný},$$

kterou si dokážete jako snadné cvičení.

2. Máme dokázat, že když mezi dvěma metrickými prostory (M, d) a (N, e) existuje stejnoměrně spojitá bijekce $f : M \to N$, jejíž inverz f^{-1} je též stejnoměrně spojitý, potom M je úplný, právě když N je úplný.

Nechť N je úplný a (x_n) je cauchyovská posloupnost v M. Lehce se vidí, že $(y_n) = (f(x_n))$ je cauchyovská posloupnost v N. (Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $d(a, b) < \delta$ implikuje $e(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Pro toto δ existuje $N \in \mathbf{N}$ takové, že $m, n \geq N$ implikuje $d(x_m, x_n) < \delta$. Pak z $m, n \geq N$ máme $e(y_m, y_n) = e(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$.) Nechť $\beta \in N$ splňuje $y_n \to b$. Označme $\alpha = f^{-1}(\beta) \in M$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $e(a, b) < \delta$ implikuje $d(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) < \varepsilon$ (stejnoměrná spojitost f^{-1}). Pak, protože $y_n \to \beta$, existuje $N \in \mathbf{N}$ takové, že $n \geq N$ implikuje $e(y_n, \beta) < \delta$, a tedy $n \geq N$ implikuje $d(x_n, \alpha) = d(f^{-1}(y_n), f^{-1}(\beta)) < \varepsilon$. Takže $x_n \to \alpha$.

3. Nechť (M_1, d_1) a (M_2, d_2) jsou dva úplné metrické prostory a

$$(N, d) = (M_1 \times M_2, \sqrt{d_1^2 + d_2^2})$$

je jejich součin. Dokažte si jako cvičení, že (N, d) je rovněž úplný. $\square$

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi dvěma metrickými prostory (M, d) a (N, e) je *kontrahující*, pokud existuje číslo q, $0 < q < 1$, takové, že

$$\forall x, y \in M : \; e(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y).$$

Kontrahující zobrazení je zřejmě stejnoměrně spojité. *Pevným bodem* zobrazení f libovolné množiny X do sebe rozumíme bod a z X splňující $f(a) = a$. Posloupnost $(x_n) \subset X$ je *posloupností iterací* zobrazení $f : X \to X$, když pro $n = 1, 2, \ldots$ platí $x_{n+1} = f(x_n)$ ($x_1 \in X$ je libovolný startovací bod iterací).

Věta 17 (Picardova-Banachova věta o pevném bodu). *Každé kontrahující zobrazení f úplného metrického prostoru (M, d) do sebe má právě jeden pevný bod. Navíc každá posloupnost $(x_n) \subset M$ iterací zobrazení f konverguje k tomuto pevnému bodu.*

Důkaz. Uvažme libovolnou posloupnost iterací (x_n) zobrazení f. Protože f je kontrahující a $x_i = f(x_{i-1})$, máme odhad

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq q d(x_{n+1}, x_n) \leq q^2 d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq q^n d(x_2, x_1).$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pak plyne, že pro každé $k, n \in \mathbf{N}$ máme

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{i=1}^{k} d(x_{n+i}, x_{n+i-1}) \\ &\leq d(x_2, x_1) \sum_{i=1}^{k} q^{n+i-2} \\ &\leq d(x_2, x_1) \sum_{i=1}^{\infty} q^{n+i-2} \\ &= d(x_2, x_1) \frac{q^{n-1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že (x_n) je cauchyovská posloupnost. Díky úplnosti prostoru M má limitu a. Ze spojitosti f pak plyne, že a je pevným bodem f:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a).$$

Nechť a, b jsou dva pevné body f. Pak

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq q d(a, b),$$

což vynucuje $d(a, b) = 0$ a $a = b$. □

Dokažte si jako cvičení, že věta platí i za (zdánlivě) slabšího předpokladu, že kontrahující je pouze nějaká iterace $f^{(n)}(x) = f(f(\ldots(f(x))))$ zobrazení f.

Jako příklad aplikace věty 17 si dokážeme (lokální) existenci a jednoznačnost řešení $y(x)$ diferenciální rovnice

$$(*) \left\{ \begin{array}{lcl} y(a) &=& b \\ y'(x) &=& f(x, y(x)). \end{array} \right.$$

Zde $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je zadaná funkce ("pravá strana rovnice") a $a, b \in \mathbf{R}$ jsou zadaná čísla. Hledáme takovou reálnou funkci $y(x)$ a takový otevřený interval I obsahující a, že $y(x)$ je na I definovaná, $y(a) = b$ (říkáme, že $y(x)$ splňuje *počáteční podmínku* $y(a) = b$) a $y(x)$ má I derivaci splňující pro každé $x \in I$ druhý vztah v (*), tj. vlastní diferenciální rovnici.

Podívejme se například na rovnici $y(1) = -3$ a $y'(x) = y(x)$; zde $a = 1, b = -3$ a $f(u, v) = v$. Funkce $y(x) = -\frac{3}{\mathrm{e}} \exp(x)$ je jejím řešením na každém otevřeném intervalu $I \ni 1$.

Věta 18 (Picardova). *Pokud $f \in C(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ a existuje konstanta $M > 0$ taková, že pro každá tři čísla $u, v, w \in \mathbf{R}$ platí*

$$|f(u, v) - f(u, w)| \le M|v - w|,$$

pak každý bod $a \in \mathbf{R}$ má okolí $I = (a - \delta, a + \delta)$, na němž má rovnice (*) jednoznačné řešení $y(x)$.

Důkaz (na přednášce jsem ho zvojtil). Budeme pracovat na intervalu $I = (a-\delta, a+\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$ a na jeho uzávěru $J = [a-\delta, a+\delta]$. Z vlastností Riemannova integrálu (výpočet Riemannova integrálu Newtonovým integrálem, Riemannův integrál jako funkce horní integrační meze) plyne, že pro spojitou funkci f je rovnice (*) ekvivalentní rovnici

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt,\ \ x \in I$$

(je-li $y(x)$ řešením jedné z rovnic, je řešením i druhé). Ukážeme, že pro dostatečně malé δ má na intervalu I poslední rovnice—a tedy i rovnice (*)—jednoznačné řešení $y(x)$. Pravá strana poslední rovnice definuje zobrazení A, které funkci $y(x)$ spojité na J přiřadí funkci

$$A(y(x)) = z(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt.$$

Integrál je spojitou funkcí své horní integrační meze, takže funkce $z(x)$ je na J rovněž spojitá (dokonce má na J spojitou první derivaci: $z'(x) = f(x, y(x))$, ale to nebudeme potřebovat). Máme tedy zobrazení

$$A:\ C[a - \delta, a + \delta] \to C[a - \delta, a + \delta]$$

a potřebujeme ukázat, že A má pro dostatečně malé δ jednoznačný pevný bod, $A(y) = y$.

Pro tento účel vybavíme $C[a-\delta, a+\delta]$ maximovou metrikou $d(\cdot,\cdot)$, čímž dostaneme úplný metrický prostor (viz příklad 2), a použijeme větu 17. Ukážeme, že pro dostatečně malé δ je A kontrahující zobrazení. Nechť $y(x)$ a $z(x)$ jsou dvě funkce z $C[a-\delta, a+\delta]$. Pak

$$\begin{aligned}
d(A(y), A(z)) &= \max_{x\in J} |A(y)(x) - A(z)(x)| \\
&= \max_{x\in J} \left| \int_a^x f(t, y(t))\, dt - \int_a^x f(t, z(t))\, dt \right| \\
&= \max_{x\in J} \left| \int_a^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t)))\, dt \right| \\
&\le \max_{x\in J} \left| \int_a^x |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\, dt \right| \\
&\le \max_{x\in J} \left| \int_a^x M|y(t) - z(t)|\, dt \right| \\
&\le \max_{x\in J} \left| \int_a^x M \max_{t\in J} |y(t) - z(t)|\, dt \right| \\
&= \max_{x\in J} \left| \int_a^x M d(y,z)\, dt \right| \\
&= M\delta d(y,z).
\end{aligned}$$

Zvolíme-li $\delta \le \frac{1}{2M}$, máme $d(A(y), A(z)) \le \frac{1}{2} d(y,z)$ pro libovolné dvě funkce z $C[a-\delta, a+\delta]$ a zobrazení A je kontrahující. Podle věty 17 má jednoznačný pevný bod a věta 18 je dokázána. $\square$

Když reálná funkce dvou proměnných $f(u,v)$ splňuje pro nějakou konstantu $M > 0$ na množině $D \subset \mathbf{R}^2$ podmínku věty 18, to jest

$$|f(u,v) - f(u,w)| \le M|v-w|,\ \forall\ (u,v),(u,w) \in D,$$

řekneme, že f je na D *lipschitzovská* nebo že na D splňuje *Lipschitzovu podmínku* (pro druhou proměnnou). Funkce $f(u,v) = v$ z příkladu před větou 18 je lipschitzovská na celém $\mathbf{R}^2$, třeba s konstantou $M = 1$. Funkce $b\exp(-a)\exp(x)$ je proto pro každé $a, b \in \mathbf{R}$ jednoznačným lokálním řešením diferenciální rovnice $y(a) = b$, $y'(x) = y(x)$.

Podmínka lipschitzovskosti na celém $\mathbf{R}^2$ je zbytečně silná a v praxi mnohdy není splněna. Stačí však její lokální splnění. Dokažte si jako cvičení, že věta 18 platí i za tohoto slabšího předpokladu: existuje $h > 0$ takové, že f je na čtverci $(a-h, a+h) \times (b-h, b+h)$ spojitá a lipschitzovská.

Kapitola 2 — diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných

2.1. Velmi stručně o normovaných prostorech a prostorech se skalárním součinem. *Normovaný vektorový prostor* (NVP) je vektorový prostor X nad tělesem $\mathbf{R}$, který je vybaven zobrazením $\|\cdot\|: X \to \mathbf{R}$, zvaným *norma*, splňujícím tři axiomy (pro všechny $x, y \in X$ a $\lambda \in \mathbf{R}$):

a) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (positivní definitnost),
b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogenita) a
c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost).

Normovaný vektorový prostor je přirozeným způsobem i metrickým prostorem: funkce $d(x, y) := \|x - y\|$ je metrika (ověřte jako cvičení). Protože se zrodila z normy, je translačně invariantní: $d(x+z, y+z) = d(x, y)$. *Banachův prostor* [1] je úplný NVP, tj. odvozená metrika je úplná.

Metriky $d_p(\cdot, \cdot)$ na $\mathbf{R}^n$, pro $p \geq 1$ a $p = \infty$ (viz 1. přednáška), jsou odvozeny z norem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \text{ resp. } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Podobně i pro analogické metriky na prostoru spojitých funkcí $C[a, b]$.

[1] Nazvaný podle polského matematika Stefana Banacha (1892–1945).