4. přednáška 25. října 2005

1.5. Souvislé prostory. Podmnožina E topologického prostoru $(X,\mathcal{U})$ je *obojetná*, když je otevřená i uzavřená; například množiny $\emptyset$ a X jsou obojetné. Topologie $(X,\mathcal{U})$ je *nesouvislá*, když obsahuje netriviální obojetnou množinu, různou od $\emptyset$ a X. Podmnožina E je *nesouvislá*, je-li podprostor indukovaný na E nesouvislý. Podmnožina nebo prostor, které nejsou nesouvislé, jsou *souvislé*. Souvislost je absolutní vlastnost, která nezávisí na podči nadprostoru: je-li $(X,\mathcal{U})$ podprostorem $(Y,\mathcal{V})$, pak $E \subset X$ je souvislá v X, právě když je souvislá v Y.

Tvrzení 11. *Nechť* $(X,\mathcal{U})$ *je topologický prostor.*
1. *Podmnožina* $E \subset X$ *je nesouvislá, právě když se dá pokrýt dvěma disjunktními otevřenými množinami, které ji obě protínají:*

$$\exists A, B \in \mathcal{U} : \; E \subset A \cup B, A \cap B = \emptyset, A \cap E \neq \emptyset, B \cap E \neq \emptyset.$$

Totéž platí s uzavřenými množinami.
2. *Prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je souvislý, právě když pro každé dva body* a, b *z* X *existuje souvislá podmnožina* $E \subset X$ *taková, že* $a, b \in E$.
3. *Jsou-li* $E, F \subset X$ *souvislé podmnožiny a* $E \cap F \neq \emptyset$, *potom i* $E \cup F$ *je souvislá.*

Důkaz. 1. Lehké cvičení na definici podprostoru.

2. Implikace $\Rightarrow$ je jasná, položíme $E = X$. Pro důkaz implikace $\Leftarrow$ předpokládejme, že prostor X má popsanou vlastnost, ale že současně je i nesouvislý, má netriviální obojetnou podmnožinu K. Zvolíme body $a \in K$, $b \in X \backslash K$ a souvislou podmnožinu $F \subset X$ obsahující a i b. Pokrytí $F \subset K \cup (X \backslash K)$ je ve sporu se souvislostí F (viz 1).

3. Nechť je množina $E \cup F$ nesouvislá: podle 1 máme $E \cup F \subset A \cup B$ pro dvě disjunktní otevřené množiny A a B, které obě protínají $E \cup F$. Protože E je souvislá, máme $E \subset A$ nebo $E \subset B$ (jinak by A i B protínaly E) a totéž platí pro F. Všechny čtyři možnosti však dávají spor: $E, F \subset A$ dává, že B neprotíná $E \cup F$ (podobně $E, F \subset B$), a $E \subset A, F \subset B$ (nebo naopak) dává, že $A \cap B \neq \emptyset$. $\square$

Příklad. Podmnožina $E = \{-2\} \cup [2, 7)$ euklidovského prostoru $\mathbf{R}$ je nesouvislá, například

$$E \subset (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

je pokrytí splňující 1 tvrzení 11.

Věta 12. *Podmnožina E v euklidovském prostoru $\mathbf{R}$ je souvislá, právě když je interval, to jest pro každé tři body $x < y < z$, kde $x, z \in E$, máme i $y \in E$.*

Důkaz. Dokážeme kontrapozice obou implikací, nejprve $\neg \Leftarrow \neg$. Nechť $x < y < z$ jsou tři reálná čísla, $x, z \in E$ a $y \notin E$. Položíme

$$A = (-\infty, y) \quad \text{a} \quad B = (y, \infty).$$

Pak $E \subset A \cup B$ je pokrytí, které podle 1 tvrzení 11 ukazuje nesouvislost množiny E.

Implikace $\neg \Rightarrow \neg$. Nesouvislou množinu E pokryjeme uzavřenými množinami A a B splňujícími 1 tvrzení 11 a vezmeme dva (různé) body $a \in A \cap E$ a $b \in B \cap E$. Můžeme předpokládat, že $a < b$. Pokud $[a, b] \not\subset E$, jsme hotovi (existuje bod c mezi a a b takový, že $c \notin E$). Budeme předpokládat, že $[a, b] \subset E$ a odvodíme spor. Vezmeme

$$d = \inf\{x \in [a, b] \mid x \in B\}.$$

Patrně $d \in B$ (případ $d = b \in B$ je jasný a pokud $d < b$, užijeme uzavřenost B). Ale $a \notin B$, tudíž $a < d \leq b$ a $[a, d) \subset A$. Z uzavřenosti A plyne, že $d \in A$. Tedy $d \in A \cap B$, což je spor. □

Věta 13. *Souvislost se zachovává dvěma operacemi.*
1. Obraz spojitým zobrazením.
2. Kartézský součin.

Důkaz. 1. Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení mezi topologickými prostory $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$, přičemž X je souvislý. Ukážeme, že $f(X)$ je souvislá podmnožina v Y. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(X) = Y$. Kdyby Y byl nesouvislý prostor a dal se vyjádřit jako disjunktní sjednocení dvou neprázdných otevřených množin A a B, stejné vyjádření bychom dostali pro prostor X za pomoci vzorů $f^{-1}(A)$ a $f^{-1}(B)$ (to jsou otevřené množiny podle tvrzení 4) a X by byl nesouvislý.

2. Ukážeme, že součin $(X \times Y, \mathcal{W})$ souvislých topologií $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$ je souvislý. Použijeme 2 z tvrzení 11. Nechť $a = (a_X, a_Y), b = (b_X, b_Y)$ jsou dva body z $X \times Y$. Označíme $X' = X \times \{a_Y\}$ a $Y' = \{b_X\} \times Y$. Patrně $a, b \in X' \cup Y'$ a stačí dokázat souvislost množiny $X' \cup Y'$. Topologie $\mathcal{W}$ indukuje na X', resp. na Y', topologii homeomorfní prostoru $(X, \mathcal{U})$, resp.

$(Y, \mathcal{V})$, takže X' a Y' jsou souvislé podmnožiny v $X \times Y$. Protože navíc $(b_X, a_Y) \in X' \cap Y$, je množina $X' \cup Y'$ souvislá podle 3 tvrzení 11. $\square$

Důsledek 14. *Nechť* $(X, \mathcal{U})$ *je souvislý topologický prostor a* $f \in C(X, \mathbf{R})$. *Pak* $f(X)$ *je interval. Spojitá reálná funkce na souvislém topologickém prostoru má tedy Darbouxovu vlastnost, nabývá všech mezihodnot.*

Důkaz. Plyne hned z 1 věty 13 a z věty 12. $\square$

Podmnožina E topologického prostoru $(X, \mathcal{U})$ je *obloukově souvislá*, když pro každé dva její body $a, b \in E$ existuje spojité zobrazení $f : [0,1] \to E$ (kde $[0,1]$ má euklidovskou a E indukovanou topologii) takové, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$. Znamená to, že každé dva body z E se dají spojit křivkou ležící v E; tato křivka může sebe sama protínat. Je vidět, že obloukově souvislá množina je souvislá (podle věty 12 a 1 věty 13 je $f([0,1])$ souvislá podmnožina v E, takže E je souvislá podle 2 tvrzení 11). Na příkladu ukážeme, že souvislost je obecně slabší vlastnost než oblouková souvislost. Poté ve větě 15 popíšeme důležitou situaci, kdy ze souvislosti už oblouková souvislost vyplývá.

Příklad. Uvažme množinu $E \subset \mathbf{R}^2$ s euklidovskou topologií, definovanou jako uzávěr grafu funkce $\sin(1/x)$ na intervalu $(0,1]$:

$$E = E_1 \cup E_2 = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \{(x, \sin(1/x)) \mid x \in (0,1]\}.$$

Množina E je souvislá: E_1 a E_2 jsou obloukově souvislé a tedy souvislé množiny, které jsou sice disjunktní, ale každý bod v E_1 je limitním bodem množiny E_2, což implikuje souvislost $E_1 \cup E_2$ podobně jako v 3 tvrzení 11. E však není obloukově souvislá: žádný bod v E_1 nelze spojit s žádným bodem v E_2 křivkou ležící v E (proč přesně? dokažte podrobně jako cvičení).

Věta 15. *Otevřená a souvislá podmnožina* E *v* $\mathbf{R}^n$ *je obloukově souvislá.*

Důkaz. Na E zavedeme binární relaci $\sim$: $a \sim b$, právě když se body a a b dají v E spojit křivkou. Jedná se o relaci ekvivalence. Reflexivita ($a \sim a$): vezmeme křivku $f(x) = a$ pro každé $x \in [0,1]$. Symetrie: pokud $a \sim b$ prostřednictvím křivky f, pak zřejmě i $b \sim a$ prostřednictvím křivky $g(x) = f(1-x)$. Tranzitivita: když $a \sim b$ a $b \sim c$ prostřednictvím křivek f a g, pak křivka

$$h(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{pro } 0 \le x \le 1/2 \\ g(2x-1) & \text{pro } 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

(zde se hodí, že jsme povolili sebeprůsečíky křivek—h může sebe sama protínat, i když f a g jsou prosté křivky) spojuje body a a c a leží v E, takže $a \sim c$. Každý blok $C \in E/\sim$ této ekvivalence je ale otevřená množina: když $a \in C$, pak $B(a,r) \subset E$ pro nějaké $r > 0$ (E je otevřená) a úsečka spojující libovolný bod $b \in B(a,r)$ s a leží celá v $B(a,r)$, takže $b \sim a$, $b \in C$ a $B(a,r) \subset C$. Bloky v $E/\sim$ jsou neprázdné otevřené množiny, které tvoří rozklad množiny E. Kdyby byly alespoň dva, E by se dala napsat jako disjunktní sjednocení dvou neprázdných otevřených množin (jeden blok a sjednocení ostatních bloků) a E by byla nesouvislá. Proto je v $E/\sim$ pouze jeden blok a každé dva body v E se dají spojit křivkou ležící v E. $\square$

Jako cvičení dokažte, že věta 15 platí, i když jako křivky povolíme jen sebe sama neprotínající lomené čáry.

Příklady. **1.** Uvedeme bez důkazů a podrobností dva výsledky ilustrující rozdíl mezi souvislostí a obloukovou souvislostí pro množiny v euklidovské rovině. Jako K označíme jednotkový čtverec $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbf{R}^2$ a jako H, D, L a P označíme jeho horní, dolní, levou a pravou stranu ($H = [0,1] \times \{1\}$ atd.). Dá se dokázat, že každé dvě obloukově souvislé množiny $A, B \subset K$ splňující $A \cap D \neq \emptyset$, $A \cap H \neq \emptyset$, $B \cap L \neq \emptyset$ a $B \cap P \neq \emptyset$ se musejí protnout, $A \cap B \neq \emptyset$. Pokud však po A a B budeme chtít jenom, aby byly souvislé, už toto tvrzení neplatí: lze sestrojit takové dvě souvislé podmnožiny čtverce K, že jedna z nich protíná horní i dolní stranu a druhá protíná levou i pravou stranu a přitom jsou disjunktní; prostupují se nějak podobně jako srážející se galaxie!

2. Souvislost a nesouvislost množin se dá použít pro důkazy nehomeomorfnosti topologických prostorů. Například euklidovské prostory $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}^2$ nejsou homeomorfní, protože homeomorfismus zachovává souvislost a $\mathbf{R}$ se vypuštěním jednoho bodu rozpadne (stane se nesouvislou množinou), kdežto $\mathbf{R}^2$ nikoli.