3. přednáška 18. října 2005

Tvrzení 6. *V hausdorffovské topologii* $(X,\mathcal{U})$ *je každá kompaktní podmnožina* $E \subset X$ *uzavřená.*

Důkaz. Stačí dokázat, že každý bod $a \in X\backslash E$ má okolí U_a disjunktní s E. (Pak je jasné, že E je uzavřená, protože $X\backslash E = \bigcup_{a \in X\backslash E} U_a$ je otevřená.) Z hausdorffovosti prostoru $(X,\mathcal{U})$ plyne, že body $a \in X\backslash E$ a $e \in E$ mají disjunktní okolí U_e a V_e: $a \in U_e \in \mathcal{U}$, $e \in V_e \in \mathcal{U}$, $U_e \cap V_e = \emptyset$. Máme otevřené pokrytí $E \subset \bigcup_{e \in E} V_e$. Z kompaktnosti množiny E plyne, že už konečně mnoho jejích bodů $e_1, e_2, \ldots, e_r$ stačí k pokrytí okolími V_e:

$$E \subset V_{e_1} \cup V_{e_2} \cup \ldots \cup V_{e_r} = V_E.$$

Položíme

$$U_a = U_{e_1} \cap U_{e_2} \cap \ldots \cap U_{e_r}.$$

U_a je okolí a a $U_a \cap V_{e_i} = \emptyset$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, r$, protože $U_a \subset U_{e_i}$ a $U_{e_i} \cap V_{e_i} = \emptyset$. Tedy $U_a \cap V_E = \emptyset$ a $U_a \cap E = \emptyset$. □

Kompaktní množina v metrickém prostoru je tedy vždy uzavřená.

Vraťme se ještě k zadání topologie pomocí báze. Je-li X množina a $\mathcal{B} \subset \exp(X)$ systém jejích podmnožin, definujeme

$$G(\mathcal{B}) = \{\bigcup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B}\},$$

tj. $G(\mathcal{B})$ se sestává z množin, které lze získat jako sjednocení množin z $\mathcal{B}$, např. $\mathcal{B} \subset G(\mathcal{B})$. Za jakých podmínek je $(X, G(\mathcal{B}))$ topologie ($\mathcal{B}$ pak je její bází)?

Lemma. $(X, G(\mathcal{B}))$ *je topologický prostor, právě když systém* $\mathcal{B}$ *splňuje dvě podmínky: (i)* $X \in G(\mathcal{B})$ *(ekvivalentně řečeno,* $\bigcup \mathcal{B} = X$*) a (ii) pokud* $A, B \in \mathcal{B}$*, potom* $A \cap B \in G(\mathcal{B})$.

Důkaz. Dokažte jako cvičení. □

Těmto dvěma podmínkám budeme říkat *podmínky báze.* Součinovou topologii $\mathcal{W}$ na $X \times Y$ vzniklou součinem topologií $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ jsme definovali jako $\mathcal{W} = G(\mathcal{B})$, kde $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$. Podle lemmatu je tato definice korektní, protože $\mathcal{B}$ splňuje podmínky báze: máme dokonce $X \times Y \in \mathcal{B}$ a pro $U \times V, U' \times V' \in \mathcal{B}$ máme též

$$(U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V') \in \mathcal{B}.$$

Věta 7. *Kompaktnost se zachovává při následujících operacích.*
1. *Přechod k uzavřenému podprostoru.*
2. *Obraz spojitým zobrazením.*
3. *Kartézský součin.*

Důkaz. (Na přednášce jsem ho nestihl, je ponechán k vlastnímu studiu z toho textu.) 1. Dokážeme implikaci

$$(X, \mathcal{U}) \text{ je kompaktní a } K \subset X \text{ je uzavřená} \Rightarrow K \text{ je kompaktní.}$$

Nechť $O = \{A_i \in \mathcal{U} \mid i \in I\}$ je otevřené pokrytí množiny K. Pak

$$\{B_i \in \mathcal{U} \mid i \in I\}, \quad \text{kde } B_i = A_i \cup (X \backslash K),$$

je otevřené pokrytí celého prostoru X. Vybereme konečné podpokrytí dané podmnožinou $J \subset I$ (X je kompaktní):

$$\bigcup_{i \in J} B_i = X.$$

Potom $\bigcup_{i \in J} A_i \supset K$ (složka $X \backslash K$ množiny B_i je disjunktní s K) a J dává konečné podpokrytí pokrytí O.

2. Nechť $f: X \to Y$ je spojité zobrazení mezi dvěma topologiemi $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$. Dokážeme implikaci

$$(X, \mathcal{U}) \text{ je kompaktní} \Rightarrow f(X) \text{ je kompaktní podmnožina } Y.$$

Nechť $O = \{B_i \in \mathcal{V} \mid i \in I\}$ je otevřené pokrytí množiny $f(X)$. Množiny $A_i = f^{-1}(B_i)$, $i \in I$, jsou otevřené (podle tvrzení 4) a tvoří pokrytí prostoru X. Vybereme konečné podpokrytí dané podmnožinou $J \subset I$ (X je kompaktní):

$$X = \bigcup_{i \in J} A_i.$$

Potom $f(X) = \bigcup_{i \in J} f(A_i) \subset \bigcup_{i \in J} B_i$ a J dává konečné podpokrytí pokrytí O.

3. Dokážeme implikaci

$$(X,\mathcal{U}) \text{ a } (Y,\mathcal{V}) \text{ jsou kompaktní} \Rightarrow \text{součin } (X \times Y, \mathcal{W}) \text{ je kompaktní.}$$

Nechť $O = \{A_i \in \mathcal{W} \mid i \in I\}$ je otevřené pokrytí součinu $X \times Y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A_i jsou z báze součinové topologie, $A_i = U_i \times V_i$ pro nějaká $U_i \in \mathcal{U}$, $V_i \in \mathcal{V}$, $i \in I$ (proč?). Definujeme

$$S_a = \{a\} \times Y,\ a \in X.$$

Součinová topologie $\mathcal{W}$ indukuje na $S_a \subset X \times Y$ topologii homeomorfní prostoru $(Y,\mathcal{V})$ (Y a S_a jsou homeomorfní prostřednictvím zobrazení $y \mapsto (a,y)$). S_a je tedy kompaktní podmnožina v $(X \times Y, \mathcal{W})$ a existuje konečná množina $J(a) \subset I$ taková, že

$$S_a \subset \bigcup_{i \in J(a)} A_i = \bigcup_{i \in J(a)} U_i \times V_i.$$

Odtud plyne, že $\bigcup_{i \in J(a)} V_i = Y$. Množina

$$U(a) = \bigcap_{i \in J(a)} U_i \subset X$$

je okolí bodu a obsažené v každé množině U_i, $i \in J(a)$. Dostáváme, že

$$U(a) \times Y = U(a) \times \left(\bigcup_{i \in J(a)} V_i \right) = \bigcup_{i \in J(a)} U(a) \times V_i \subset \bigcup_{i \in J(a)} U_i \times V_i.$$

Z otevřeného pokrytí $\{U(a) \mid a \in X\}$ kompaktního prostoru X vybereme konečné podpokrytí určené body $a_1, a_2, \ldots, a_r \in X$. Dostáváme, že

$$X \times Y = \left(\bigcup_{i=1}^{r} U(a_i) \right) \times Y = \bigcup_{i=1}^{r} U(a_i) \times Y = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j \in J(a_i)} U_j \times V_j.$$

Vidíme, že množina $J = J(a_1) \cup J(a_2) \cup \ldots \cup J(a_r)$ určuje konečné podpokrytí pokrytí O. □

Věta 8. *Metrický prostor (M,d) je kompaktní, právě když každá posloupnost bodů v M má konvergentní podposloupnost.*

Vlastnosti, že v daném metrickém prostoru má každá posloupnost konvergentní podposloupnost, budeme říkat *vlastnost P*. Podmnožina $E \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je *ε-síť*, pokud

$$\forall x \in M\ \exists y \in E :\ d(x, y) < \varepsilon.$$

Potom patrně $M = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$.

Lemma. *Když má metrický prostor (M, d) vlastnost P, potom v něm pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť.*

Důkaz. Nechť (M, d) nemá konečnou r-síť. Zvolme $x_1 \in M$ libovolně. Protože $\{x_1\}$ není r-síť, existuje takový bod $x_2 \in M$, že $d(x_1, x_2) \geq r$. Podobně existuje $x_3 \in M$ takový, že $d(x_i, x_3) \geq r$ pro $i = 1, 2$, a tak dále. Takto sestrojíme nekonečnou posloupnost bodů (x_n) v M s vlastností, že $d(x_i, x_j) \geq r$ pro všechna $1 \leq i < j$. Z této posloupnosti nelze vybrat konvergentní podposloupnost—(M, d) nemá vlastnost P. □

Důkaz věty 8. Implikace $\Leftarrow$. Předpokládáme, že (M, d) má vlastnost P a že má otevřené pokrytí O, které nemá konečné podpokrytí, a odvodíme spor. Pro $n = 1, 2, \dots$ uvážíme konečné $1/n$-sítě S_n (které existují podle lemmatu). Kdyby každá koule v $\{B(x, 1/n) \mid x \in S_n\}$ byla obsažena v nějaké množině z O, z konečnosti S_n a z $M = \bigcup_{x \in S_n} B(x, 1/n)$ by plynulo, že O má konečné podpokrytí. Takže existuje takový bod $x_n \in S_n$, že koule $B(x_n, 1/n)$ není obsažena v žádné množině $U \in O$. Podle vlastnosti P má posloupnost (x_n) konvergentní podposloupnost. Pro jednoduchost značení předpokládejme, že už samotná (x_n) konverguje a $\alpha \in M$ je její limita:

$$x_n \to \alpha.$$

Pak $\alpha \in U$ pro nějakou množinu U z O, a tedy $B(\alpha, r) \subset U$ pro nějaké $r > 0$ (U je otevřená). Vezmeme $N \in \mathbf{N}$ tak veliké, že $x_N \in B(\alpha, r/2)$ a $1/N < r/2$. Díky trojúhelníkové nerovnosti

$$B(x_N, 1/N) \subset B(\alpha, r) \subset U,$$

což je spor.

Implikace $\Rightarrow$. Ukážeme, že v kompaktním metrickém prostoru (M, d) má každá posloupnost $(x_n) \subset M$ konvergentní podposloupnost. Řekneme, že $a \in M$ je limitním bodem posloupnosti (x_n), když pro každé $r > 0$ je množina

$\{n \in \mathbf{N} \mid d(x_n, a) < r\}$ nekonečná. Pokud posloupnost (x_n) má limitní bod a, dá se z ní snadno vybrat podposloupnost konvergující k a a jsme hotovi. Budeme předpokládat, že (x_n) nemá žádný limitní bod a odvodíme spor. Pro každý bod a z M tedy existuje $r_a > 0$ takové, že množina

$$I(a) = \{n \in \mathbf{N} \mid x_n \in B(a, r_a)\}$$

je konečná. Z pokrytí $\{B(a, r_a) \mid a \in M\}$ prostoru M vybereme konečné podpokrytí dané body $a_1, a_2, \ldots, a_t$. Protože množina

$$I = I(a_1) \cup I(a_2) \cup \ldots \cup I(a_t) \subset \mathbf{N}$$

je konečná, $I \neq \mathbf{N}$ a můžeme zvolit číslo $N \in \mathbf{N} \backslash I$. Pak $x_N \notin B(a_i, r_{a_i})$ pro $i = 1, 2, \ldots, t$ a

$$x_N \notin \bigcup_{i=1}^{t} B(a_i, r_{a_i}) = M,$$

což je spor. $\square$

Příklady. 1. Jak víme z Matematické analýzy I, každá posloupnost (x_n) v intervalu $[a, b] \subset \mathbf{R}$, kde $-\infty < a \leq b < \infty$, má podposloupnost konvergující k limitě ležící v $[a, b]$. Podle věty 8 je tedy interval $[a, b]$ kompaktní podmnožina euklidovského prostoru $\mathbf{R}$.

2. Odtud a s pomocí 3 věty 7 dostáváme, že každý kvádr

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

kde $[a_i, b_i]$ jsou kompaktní intervaly v $\mathbf{R}$, je kompaktní podmnožina $\mathbf{R}^n$.

Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je *omezená*, když existuje koule B v M, která X obsahuje. Posloupnost $(x_n) \subset M$ *jde k nekonečnu*, když pro nějaký bod a platí $\lim_{n\to\infty} d(a, x_n) \to \infty$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pak platí $\lim_{n\to\infty} d(b, x_n) \to \infty$ pro každý bod b z M. Posloupnost (x_n) jdoucí k nekonečnu není konvergentní a každá její podposloupnost jde k nekonečnu, (x_n) tedy nemá konvergentní podposloupnost. Když je množina $X \subset M$ neomezená, obsahuje posloupnost jdoucí k nekonečnu (vezmeme libovolně $x_n \in X \backslash B(a, n)$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a libovolný pevný bod a) a podle věty 8 není kompaktní. Kompaktní podmnožina tedy musí být omezená. Také víme (z tvrzení 6), že kompaktní podmnožina musí být uzavřená. Shrnuto, pro množinu X v metrickém prostoru máme implikaci

$$X \text{ je kompaktní} \Rightarrow X \text{ je uzavřená a omezená.}$$

V euklidovských prostorech platí i opačná implikace.

Věta 9. *Podmnožina euklidovského prostoru* $\mathbf{R}^n$ *je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.*

Důkaz. Víme, že implikace $\Rightarrow$ platí pro každý metrický prostor. Nechť naopak $X \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřená a omezená. Z omezenosti plyne, že $X \subset K = [0, a]^n$ pro nějaké $a > 0$. Krychle K je kompaktní (viz příklad 2) a (třeba podle tvrzení 6) uzavřená. Množina X je uzavřená v $\mathbf{R}^n$, je tedy uzavřená i jako podmnožina K a proto kompaktní jako podmnožina K (podle 1 věty 7). Odtud plyne, že X je kompaktní i jako podmnožina $\mathbf{R}^n$. □

Následující dva příklady však ukazují, že obecně opačná implikace neplatí.

Příklady. 1. (Příklad p. Heinze.) Nechť M je nekonečná množina a (M, d) je diskrétní metrický prostor: $d(x, x) = 0$ a $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$. Pak M je uzavřená a omezená množina ($B(a, 2) = M$ pro každý bod a), ale jakákoli posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ složená ze vzájemně různých prvků nemá konvergentní podposloupnost, protože $d(x_m, x_n) = 1$ pro $m \neq n$, a (M, d) není kompaktní.

2. Nechť $M = C(0, 1)$ s maximovou metrikou a f_0 označuje identicky nulovou funkci. Uzavřená jednotková koule $\overline{B}(f_0, 1)$ v M je uzavřená a omezená množina, ale posloupnost funkcí (f_n) z $\overline{B}(f_0, 1)$, kde

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x \leq 2^{-n-1} \\ 2 - 2^{n+1}x & \text{pro } 2^{-n-1} \leq x \leq 2^{-n} \\ 0 & \text{pro } 2^{-n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

nemá konvergentní podposloupnost, protože, opět,

$$d(f_m, f_n) = \max_{x \in [0,1]} |f_m(x) - f_n(x)| = 1$$

pro každé dva indexy $m \neq n$.

Partii o kompaktnosti zakončíme přehledem důležitých vlastností spojitých zobrazení definovaných na kompaktech.

Věta 10. *Nechť* $f: X \to Y$ *je spojité zobrazení mezi topologiemi* $(X,\mathcal{U})$ *a* $(Y,\mathcal{V})$, *přičemž* $(X,\mathcal{U})$ *je kompaktní prostor.*
1. *Pokud* $Y = \mathbf{R}$, *nabývá* f *na* X *svého maxima i minima.*
2. *Je-li* f *bijekce a* Y *hausdorffovský, je inverzní zobrazení* f^{-1} *spojité.*
3. *Jsou-li prostory* X *a* Y *metrizovatelné, je* f *stejnoměrně spojité.*

Důkaz. 1. Obraz $f(X)$ je kompaktní podmnožina v $\mathbf{R}$ (podle 2 věty 7), takže je uzavřená a omezená (podle věty 9). To znamená, že $f(X)$ obsahuje své supremum a infimum a má tedy největší a nejmenší prvek.

2. Podle tvrzení 4 stačí ověřit, že vzor každé uzavřené množiny $Z \subset X$ v zobrazení f^{-1} je uzavřená podmnožina v Y. Ale $(f^{-1})^{-1}(Z) = f(Z)$ a Z je kompaktní (podle 1 věty 7), takže $f(Z)$ je kompaktní podmnožina v Y (podle 2 věty 7) a je tedy uzavřená (tvrzení 6).

3. Dokažte jako cvičení, dokazuje se úplně stejně jako stejnoměrná spojitost funkce z $C(0,1)$. $\square$

V minulé přednášce jsme na příkladu ukázali, že část 2 pro nekompaktní X nemusí platit.