2. přednáška 11. října 2005

1.2. Topologické prostory. *Topologický prostor* (nebo stručněji *topologie*[1]) je dvojice $(X, \mathcal{T})$, kde X je množina a $\mathcal{T}$ je systém (ne nutně všech) podmnožin množiny X, zvaných *otevřené množiny*, splňující tři axiomy:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
b) je-li $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$ libovolný podsystém $\mathcal{T}$, potom $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ a
c) je-li $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$ libovolný konečný podsystém $\mathcal{T}$, potom $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Systém otevřených množin tedy obsahuje prázdnou množinu a celé X a je uzavřený na libovolná sjednocení a na konečné průniky. *Uzavřené množiny* topologie $(X, \mathcal{T})$ jsou množiny $\{X \backslash U \mid U \in \mathcal{T}\}$. *Okolí bodu* $a \in X$ je otevřená množina U taková, že $a \in U$.

Nejjednodušší příklad topologického prostoru je dvojice $(X, \{\emptyset, X\})$. Základní příklad je systém otevřených množin metrického prostoru (podle tvrzení 1 tvoří topologický prostor); budeme stručně mluvit o *topologii metrického prostoru. Euklidovským prostorem* $\mathbf{R}^n$ budeme rozumět $\mathbf{R}^n$ s topologií definovanou euklidovskou metrikou d_2 (za chvíli uvidíme, že stejnou topologii definuje i každá z metrik d_p a d_∞).

Topologický prostor tvořený otevřenými množinami v nějakém metrickém prostoru se nazývá *metrizovatelný.* Zdaleka ne všechny topologie jsou metrizovatelné. Metrizovatelnost implikuje různé speciální vlastnosti, které obecně topologie mít nemusejí, a když je nemají, nejsou metrizovatelné. Například už víme, že každá konečná množina je v metrizovatelné topologii uzavřená. Proto topologie $(X, \{\emptyset, X\})$ není pro X s více než jedním prvkem metrizovatelná. Další důležitá vlastnost metrizovatelné topologie $(X, \mathcal{T})$ je:

$$\forall\, a, b \in X, a \neq b\ \exists\, U, V \in \mathcal{T}:\ a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset,$$

to jest, každé dva různé body mají disjunktní okolí (dokažte jako cvičení). Topologickým prostorům s touto vlastností se říká *Hausdorffovy*[2] nebo *hausdorffovské.* Topologie, která není Hausdorffova, není metrizovatelná. V tomto textu se budeme zabývat pouze hausdorffovskými topologiemi.

[1] Z řeckých výrazů topos = místo a logos = vědění, slovo.

[2] Německý matematik Felix Hausdorff (1868–1942) zavedl pojem topologického prostoru v r. 1914.

Báze topologie $(X, \mathcal{T})$ je takový podsystém $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, že každá množina z $\mathcal{T}$ se dá vyjádřit jako sjednocení množin z $\mathcal{S}$. Například systém všech koulí $\{B(a,r) \mid a \in M, r > 0\}$ v metrickém prostoru (M, d) tvoří bázi topologie (M, d). Pro zadání topologie stačí zadat nějakou její bázi, tak jsme ostatně definovali otevřené množiny v metrickém prostoru (viz ještě poznámku o bázi topologie v příští 3. přednášce).

Dvě metriky (X, d_1) a (X, d_2) na téže množině jsou *ekvivalentní*, pokud definují stejnou topologii. K tomu je nutné a stačí, aby pro každý bod a z X a každé $r > 0$ existovalo $s > 0$ takové, že $B_{d_1}(a, s) \subset B_{d_2}(a, r)$ a naopak (s vyměněnými d_1 a d_2). Uveďme postačující podmínku ekvivalence metrik (která není obecně nutná): existují-li konstanty $0 < r \leq s$ takové, že pro každé dva body x, y z X máme

$$r \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq s \cdot d_1(x, y),$$

jsou d_1 a d_2 ekvivalentní metriky. Například všechny metriky d_∞ a d_p na $\mathbf{R}^n$ v příkladu z 1. přednášky jsou ekvivalentní, protože platí nerovnosti

$$d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y) \leq n^{1/p} d_\infty(x, y).$$

Podobně z nerovností $(a, b \geq 0)$

$$\max(a, b) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b \leq 2 \max(a, b)$$

plyne, že všechny tři součinové metriky jsou ekvivaletní.

Nechť $(X_1, \mathcal{T}_1)$ a $(X_2, \mathcal{T}_2)$ jsou topologie. Řekneme, že $(X_1, \mathcal{T}_1)$ je *podprostorem* $(X_2, \mathcal{T}_2)$, pokud $X_1 \subset X_2$ a

$$\mathcal{T}_1 = \{X_1 \cap A \mid A \in \mathcal{T}_2\}.$$

Řekneme, že $(X, \mathcal{T})$ je *součinem* $(X_1, \mathcal{T}_1)$ a $(X_2, \mathcal{T}_2)$, pokud $X = X_1 \times X_2$ a topologie $\mathcal{T}$, zvaná *součinová topologie*, je dána bází

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

(viz ještě poznámku o bázi topologie v příští 3. přednášce).

Topologie $(X, \mathcal{T})$ definuje na podmnožině $Y \subset X$ *indukovanou topologii* $(Y, \mathcal{T}')$, kde $\mathcal{T}' = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{T}\}$; $(Y, \mathcal{T}')$ je zřejmě podprostorem $(X, \mathcal{T})$. Otevřenost a uzavřenost množiny je relativní pojem, může se změnit při přechodu k nadprostoru. (Například v právě popsané situaci je Y otevřená i uzavřená množina v $(Y,\mathcal{T}')$, ale nemusí být ani jedno v nadprostoru $(X,\mathcal{T})$. Na druhou stranu, je-li $E \subset Y$ otevřená v $(X,\mathcal{T})$, je otevřená i v $(Y,\mathcal{T}')$).

Poznámky k součinu topologií. Rozmyslete si jako cvičení, že pokud v definici báze $\mathcal{B}$ součinové topologie necháme A_i probíhat místo topologie $\mathcal{T}_i$, $i = 1,2$, jen nějakou její bázi, dostaneme menší množinu $\mathcal{B}'$, která nicméně generuje tutéž součinovou topologii (viz ještě poznámku o bázi topologie v příští 3. přednášce). Rozmyslete si jako cvičení, že $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ bereme s euklidovskou topologií, dává euklidovskou topologii na $\mathbf{R}^2$. Obecněji, součin $\mathbf{R}^k$ a $\mathbf{R}^l$ s euklidovskými topologiemi dává (převedeme-li samozřejmě body z formátu (k-tice, l-tice) na formát $k+l$-tic) euklidovskou topologii na $\mathbf{R}^{k+l}$.

1.3. Spojitá zobrazení. Zobrazení $f: X \to Y$ mezi topologickými prostory $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ je *spojité v bodě* $a \in X$, pokud pro každé okolí $V \in \mathcal{V}$ bodu $f(a)$ existuje okolí $U \in \mathcal{U}$ bodu a takové, že $f(U) \subset V$. Dovolíme-li V a U probíhat pouze nějaké báze příslušných topologií, dostaneme ekvivalentní definici; viz metrické prostory, kde obvyklá definice spojitosti užívá báze koulí. Zobrazení f je *spojité*, je-li spojité v každém bodě. Množina všech spojitých zobrazení mezi topologickými prostory $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ se označuje $C(X,Y)$.

Tvrzení 4. *Zobrazení $f: X \to Y$ mezi topologickými prostory $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ je spojité, právě když vzor každé otevřené množiny je otevřená množina, tj. $\forall V \in \mathcal{V}: f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť $f \in C(X,Y)$ a $V \in \mathcal{V}$. Pokud $f(a) \in V$ pro nějaký bod a z X, existuje díky spojitosti f okolí $U_a \in \mathcal{U}$ bodu a takové, že $f(U_a) \subset V$, to jest $U_a \subset f^{-1}(V)$. Potom máme

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{f(a)\in V} U_a$$

a $f^{-1}(V)$ je otevřená množina, protože je sjednocením otevřených množin. (Pokud žádné a s $f(a) \in V$ neexistuje, je $f^{-1}(V) = \emptyset$ rovněž otevřená množina.)

Implikace $\Leftarrow$. Nechť $f(a) \in V \in \mathcal{V}$. Podle předpokladu je $U = f^{-1}(V)$ otevřená množina a zřejmě $a \in U$. Takže U je okolí a a $f(U) \subset V$ (dokonce $f(U) = V$). Zobrazení f je spojité v každém bodě a tedy spojité. $\square$

Tvrzení 5. *Nechť $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ a $h = f \circ g: X \to Z$ jsou zobrazení mezi topologickými prostory $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$ a $(Z,\mathcal{W})$.* 1. *Jsou-li f*

a g spojitá zobrazení, je i h spojité. 2. *Je-li f spojité v bodě $a \in X$ a g v bodě $f(a) \in Y$, je h spojité v bodě a.*

Důkaz. 1. Použijeme tvrzení 4. Nechť $W \in \mathcal{W}$ je libovolná otevřená množina. Patrně $h^{-1}(W) = f^{-1}(V)$, kde $V = g^{-1}(W)$. Díky spojitosti g máme $V \in \mathcal{V}$ a díky spojitosti f máme $h^{-1}(W) = f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$, takže h je spojité.

2. Nechť $W \in \mathcal{W}$ je okolí bodu $h(a) = g(f(a))$. Podle předpokladu o f a g máme okolí $V \in \mathcal{V}$ bodu $f(a)$ takové, že $g(V) \subset W$, a tedy i okolí $U \in \mathcal{U}$ bodu a takové, že $f(U) \subset V$. Pak $h(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$. □

Bijekce (vzájemně jednoznačné zobrazení) $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ se nazývá *homeomorfismus*, pokud f i f^{-1} jsou spojitá zobrazení. Topologické prostory, mezi nimiž existuje homeomorfismus, jsou *homeomorfní*, to jest nerozlišitelné, izomorfní.

Příklady. 1. Topologické prostory $X = (0,1)$ a $Y = \mathbf{R}$ (s euklidovskou topologií) jsou homeomorfní, například prostřednictvím zobrazení

$$f : X \to Y, \; f(x) = \tan(\pi(x - \tfrac{1}{2})).$$

2. Nechť $X = [0, 2\pi)$ a $Y = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ (jednotková kružnice v rovině), s euklidovskou topologií indukovanou z $\mathbf{R}$, resp. z $\mathbf{R}^2$, a nechť

$$f : X \to Y, \; f(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

(interval X "navineme" na kružnici Y). Pak f je bijekce a je to spojité zobrazení, ale inverz f^{-1} není spojité zobrazení (proč?), takže f není homeomorfismus. Ve skutečnosti oba topologické prostory ani homeomorfní nejsou, podstatně se odlišují (X není kompaktní, Y je).

1.4. Kompaktní prostory. *Otevřené pokrytí* podmnožiny $E \subset X$ v topologickém prostoru $(X,\mathcal{U})$ je systém otevřených množin $O = \{A_i \in \mathcal{U} \mid i \in I\}$ takový, že

$$\bigcup_{i \in I} A_i \supset E.$$

Řekneme, že O má *konečné podpokrytí*, když existuje konečná podmnožina $J \subset I$ taková, že stále

$$\bigcup_{i \in J} A_i \supset E.$$

Množina $E \subset X$ je *kompaktní*, pokud její každé otevřené pokrytí má konečné podpokrytí. Celý prostor $(X, \mathcal{U})$ je *kompaktní*, je-li X (jako podmnožina X) kompaktní.

Dokažte si jako cvičení, že podmnožina $E \subset X$ je kompaktní v $(X, \mathcal{U})$, právě když indukovaný topologický (pod)prostor $(E, \mathcal{U}')$ je kompaktní. Kompaktnost je tedy absolutní vlastnost.

Příklady. 1. Nechť $E = (0,1)$ a $X = \mathbf{R}$ (s euklidovskou topologií). Otevřené pokrytí E intervaly

$$O = \{(\tfrac{1}{2}, 1),\ (\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}),\ (\tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{8}),\ (\tfrac{1}{16}, \tfrac{3}{16}),\ \ldots\}$$

nemá konečné podpokrytí (nelze vypustit ani jeden interval) a E tedy není kompaktní. Podobně ani celé $\mathbf{R}$ není kompaktní kvůli otevřenému pokrytí

$$O = \{\ldots,\ (-4,-2),\ (-3,-1),\ (-2,0),\ (-1,1),\ \ldots\}.$$

2. Interval $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je kompaktní podmnožina, stejně jako jednotková kružnice v rovině (s indukovanou euklidovskou topologií). To plyne z obecné charakterizační věty o kompaktních podmnožinách euklidovského prostoru $\mathbf{R}^n$, kterou zanedlouho dokážeme.

Tvrzení 6. *V hausdorffovské topologii $(X, \mathcal{U})$ je každá kompaktní podmnožina $E \subset X$ uzavřená.*

Dokážeme příště.