1. přednáška 4. října 2005

Kapitola 1 — metrické a topologické prostory

1.1. Metrické prostory—základní definice. *Metrický prostor* je dvojice (M, d), kde M je množina a

$$d:\ M \times M \to \mathbf{R}_{\geq 0}$$

je funkce, zvaná *metrika*, splňující tři axiomy:

a) $d(x, y) = d(y, x)$ (symetrie),
b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ a
c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (trojúhelníková nerovnost).

Metrické prostory jsou abstrakcí jevu vzdálenosti. Poznamenejme, že nezápornost hodnot metriky se nemusí předpokládat, vyplývá už z axiomů b) a c).

Izometrie je bijekce $f:\ M_1 \to M_2$ mezi metrickými prostory (M_1, d_1) a (M_2, d_2), která zachovává vzdálenosti: $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$ pro všechny $x, y \in M_1$. Existuje-li taková bijekce, jsou prostory M_1 a M_2 *izometrické*, to jest prakticky nerozlišitelné, izomorfní.

Příklady metrických prostorů. 1. Nechť $M = \mathbf{R}^n$ a $p \geq 1$ je reálné číslo. Na M definujeme metriky ($x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$)

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Axiomy a) a b) se ověří lehce, ovšem důkaz trojúhelníkové nerovnosti je netriviální. Pro $n = 1$ dostáváme metriku $|x - y|$ a pro $p = 2, n \geq 2$ *euklidovskou metriku*

$$d_2(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2};$$

euklidovskými prostory budeme nadále rozumět metrické prostory $(\mathbf{R}^n, d_2)$. Pro $p = 1, n \geq 2$ dostáváme tzv. *pošťáckou metriku* a pro $p \to \infty$ *maximovou metriku*

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

(dokažte jako cvičení).

2. Jako M vezmeme množinu všech omezených funkcí $f: X \to \mathbf{R}$, kde X je nějaká množina, a pak na M máme *supremovou metriku*

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Pokud $M = C(a,b)$ (množina všech reálných funkcí definovaných a spojitých na intervalu $[a,b]$), supremum se vždy nabývá a máme *maximovou metriku*

$$d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

3. Vezměme $M = C(a,b)$ a reálné číslo $p \geq 1$. Podobně jako v prvním příkladu máme na M metriky

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Hodnota $p = 1$ dává *integrální metriku* a $p \to \infty$ dává maximovou metriku z druhého příkladu (dokažte jako cvičení). Důležitý je opět případ $p = 2$. Co je na exponentu $p = 2$ zvláštního? Ukazuje se, že metrika $d_2(\cdot,\cdot)$ (zde i v prvním příkladu) je odvozena ze skalárního součinu na jistém vektorovém prostoru, a proto má řadu pěkných a důležitých vlastností. Zmíníme se o tom v závěru první kapitoly.

Vezmeme-li $M = R(a,b)$ (množina všech funcí majících na $[a,b]$ Riemannův integrál), je $d_p(f,g)$ definována, ale nesplňuje axiom b) a nedostáváme metriku. Změníme-li například hodnotu funkce $f \in R(a,b)$ v jediném bodě, dostaneme odlišnou funkci $f_0 \in R(a,b)$, ale $d_p(f,f_0) = 0$. Tato potíž se odstraní tak, že místo $R(a,b)$ pracujeme s $R(a,b)/\sim$, kde $\sim$ je vhodná relace ekvivalence; nebudeme se pouštět do podrobností.

4. Souvislý graf $G = (M,E)$ s množinou vrcholů M definuje metriku

$$d(u,v) = \#\text{ hran na (nějaké) nejkratší cestě v } G \text{ spojující } u \text{ a } v.$$

5. Položme $M = \mathbf{Z}$ (množina celých čísel) a vezměme nějaké prvočíslo p (třeba $p = 29$). Pro $z \in \mathbf{Z}$ jako $m_p(z)$ označíme největší celé číslo $e \geq 0$ takové, že p^e dělí z; $m_p(0) := \infty$. Na M definujeme tzv. *p-adickou metriku* $(2^{-\infty} = 0)$

$$d_p(x,y) = 2^{-m_p(x-y)}.$$

Dokažte jako cvičení, že p-adická metrika splňuje toto zesílení trojúhelníkové nerovnosti:

$$d_p(x,y) \leq \max(d_p(x,z), d_p(z,y)).$$

Metrikám splňujícím tuto silnější verzi trojúhelníkové nerovnosti se říká *ultrametriky.* Ukažte jako cvičení, že v ultrametrickém prostoru jsou všechny trojúhelníky rovnoramenné a že v libovolné kouli je každý bod jejím středem.

V další textu (M, d) označuje metrický prostor. Připomínáme, že pro $a \in M$ a reálné $r > 0$ se *(otevřenou) koulí (se středem a a poloměrem r)* rozumí množina $B(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}$. *Uzavřená koule (se středem a a poloměrem r)* je $\overline{B}(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}$. Podmnožina $X \subset M$ je *otevřená*, pokud $\forall a \in X \; \exists r > 0 : B(a, r) \subset X$. $X \subset M$ je *uzavřená*, pokud je $M \backslash X$ otevřená množina.

Dokažte jako cvičení, že každá koule $B(a, r)$ je otevřená množina a že každá konečná množina je uzavřená.

Tvrzení 1. *V metrickém prostoru (M, d) jsou množiny $\emptyset$ a M otevřené i uzavřené. Sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina a průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina a průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.*

Důkaz. Množiny $\emptyset$ a M jsou zjevně otevřené a tedy (jsou doplňkem jedna druhé) i uzavřené. Nechť $G_i, i \in I$ jsou otevřené množiny a $a \in G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Pak a leží v nějaké G_j a tedy, pro nějaké $r > 0$, $B(a, r) \subset G_j \subset G$ a G je otevřená. Nechť je indexová množina I konečná a $a \in G = \bigcap_{i \in I} G_i$. To znamená, že $a \in G_i$ pro každé $i \in I$, a tak $B(a, r_i) \subset G_i$ pro nějaká čísla $r_i > 0$. Protože jich je jen konečně mnoho, můžeme vzít $r > 0$, že $r < \min(r_i : \; i \in I)$, a máme $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset G_i$ pro všechna $i \in I$. Tedy $B(a, r) \subset G$ a G je otevřená. Tvrzení o uzavřených množinách vyplývají pomocí de Morganových identit přechodem k doplňkům. □

Okolí bodu $a \in M$ je otevřená množina $U \subset M$ obsahující a jako prvek. Nechť $a \in M$ a $X \subset M$. V následujících definicích píšeme stručně U a rozumíme tím "okolí U bodu a". Řekneme, že a je *vnitřním bodem* množiny X, existuje-li U, že $U \subset X$. Podobně je a *vnějším bodem* množiny X, existuje-li U, že $U \subset M \backslash X$ (tj. a je vnitřním bodem doplňku X). Není-li a ani vnitřním ani vnějším bodem X, je *hraničním bodem* X. Jinými slovy to znamená, že každé U protíná X i doplněk X. Je-li pro každé U průnik $U \cap X$ nekonečný, nazývá se *a limitním bodem* X. Konečně, pokud existuje U, že $U \cap X = \{a\}$, je *a izolovaným bodem* X. Vnitřní a izolované body množiny v ní samozřejmě leží a vnější body leži mimo ni. Hraniční a limitní body množiny mohou ležet v ní i mimo ni. *Uzávěr* množiny $X \subset$ se značí $\overline{X}$ a je to sjednocení X a množiny limitních bodů množiny X.

Příklad. Nechť (M, d) je euklidovská rovina $\mathbf{R}^2$ a $X = (B \backslash \{p\}) \cup \{b\}$, kde B je otevřený kruh (tj. koule) se středem v počátku $p = (0, 0)$ a poloměrem 1 a $b = (2, 0)$. Pak vnitřní body X tvoří množinu $B \backslash \{p\}$, vnější body množinu $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| > 1, x \neq b\}$, hraniční body množinu $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\} \cup \{p, b\}$, limitní body množinu $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ a izolované body množinu $\{b\}$. Uzávěr X je množina $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} \cup \{b\}$.

Tvrzení 2. *Množina X je uzavřená, právě když se rovná svému uzávěru, $X = \overline{X}$.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Protože je X uzavřená, $U = M \backslash X$ je otevřená a je okolím každého bodu mimo X. Protože $U \cap X = \emptyset$, není žádný bod mimo X limitním bodem X a máme $X = \overline{X}$.

Implikace $\Leftarrow$. Z předpokladu $X = \overline{X}$ odvodíme otevřenost $M \backslash X$. Nechť a je libovolný bod mimo X. Protože není limitním bodem X, má okolí U protínající X jen v konečně mnoha bodech. Z toho plyne, že existuje (menší) okolí U_a bodu a, které je disjunktní s X. (Množina $P = U \cap X$ je konečná, a proto uzavřená. Stačí vzít $U_a = U \cap (M \backslash P)$.) Pak

$$M \backslash X = \bigcup_{a \in M \backslash X} U_a$$

a množina $M \backslash X$ je otevřená, neboť je sjednocením otevřených množin. $\square$

Posloupnost $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots) \subset M$ bodů v metrickém prostoru (M, d) je *konvergentní*, pokud existuje bod $a \in M$ takový, že

$$\forall U,\ U \text{ je okolí bodu } a,\ \exists N : n \geq N \Rightarrow x_n \in U.$$

Bod a se pak nazývá *limitou* posloupnosti (x_n). Dvě ekvivalentní formulace tohoto faktu: (i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N : d(x_n, a) < \varepsilon$ a (ii) $\lim_{n \to \infty} d(x_n, a) = 0$ (limitu posloupnosti bodů z metrického prostoru jsme převedli na limitu posloupnosti reálných čísel). Pojem limity v metrickém prostoru má obvyklé vlastnosti, zejména je limita určena jednoznačně a podposloupnost má tutéž limitu jako výchozí konvergentní posloupnost. Posloupnost (x_n) v (M, d) je *cauchyovská*, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Tvrzení 3. *Nechť a je bod v metrickém prostoru* (M, d) *a* $X \subset M$. *Pak a leží v uzávěru množiny* X, *právě když leží v* X *nebo je limitou posloupnosti bodů z* X.

Důkaz. Dokažte si jako cvičení. □

Uvedeme dvě jednoduché konstrukce vyrábějící nové metrické prostory ze starých. Metrický prostor (M_1, d_1) je *podprostorem* metrického prostoru (M_2, d_2), pokud $M_1 \subset M_2$ a pro každé dva body x, y z M_1 máme $d_1(x, y) = d_2(x, y)$. (M, d) je *součinem* metrických prostorů (M_1, d_1) a (M_2, d_2), když $M = M_1 \times M_2$ a d je jedna z následujících třech metrik ($x = (x_1, x_2)$ a $y = (y_1, y_2)$ jsou z M a označili jsme $v_1 = d_1(x_1, y_1), v_2 = d_2(x_2, y_2)$):

$$d(x, y) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \;\text{ nebo }\; d(x, y) = v_1 + v_2 \;\text{ nebo }\; d(x, y) = \max(v_1, v_2).$$

Metrický prostor (M, d) a podmnožina $X \subset M$ dávají nový metrický prostor (X, d'), kde d' je metrika d zúžená na $X \times X$; je jasné, že (X, d') je podprostorem (M, d). Říká se také, že (X, d') je podprostor s *indukovanou metrikou*. Důležitá poznámka: za této situace můžeme mít posloupnost $(x_n) \subset X$, která je konvergentní v (M, d), ale nikoli v indukovaném podprostoru (X, d'), v němž prostě chybí její limita. Například posloupnost $(1/n)$ konverguje v euklidovském prostoru $\mathbf{R}$, ale nikoli v euklidovském podprostoru $(0, 1)$. Konvergentnost posloupnosti je v tomto smyslu relativní vlastnost. Totéž platí pro otevřenost či uzavřenost množiny: interval $[1/2, 1)$ je uzavřená množina v $(0, 1)$, ale už to není uzavřená množina v nadprostoru $\mathbf{R}$. Na druhou stranu je třeba cauchyovskost posloupnosti absolutní vlastnost, která nezávisí na tom, v kterém pod- či nadprostoru danou posloupnost uvažujeme.

Může se zdát trochu divné, že v definici součinu metrických prostorů necháváme vybrat z několika součinových metrik. Není ale těžké vidět, že všechny tři definují stejné otevřené podmnožiny v $M = M_1 \times M_2$, a proto odpovídající součinové prostory se velmi podobají (konverguje-li posloupnost v jedné z metrik, konverguje ve všech třech a navíc k téže limitě atd.). Pro úvahy a pojmy, kde se vystačí jen s otevřenými množinami (což zahrnuje vše z této přednášky, s vyjímkou izometrie a cauchyovskosti posloupnosti), jsou tyto tři součinové metriky nerozlišitelné. Zformalizujeme to v příští přednášce v definici topologického prostoru.