14. přednáška 10. ledna 2006

Tvrzení 8 (metoda variace konstant). *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, $A: I \to \mathbf{R}^{n\times n}$ a $b: I \to \mathbf{R}^n$ jsou daná maticová a daná vektorová funkce se spojitými položkami a $y^1, \dots, y^n: I \to \mathbf{R}^n$ je FSŘ homogenní soustavy $y' = Ay$. Nechť dále $x_0 \in I$ a $y^0 \in \mathbf{R}^n$ jsou dané počáteční podmínky a*

$$Y = Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & y_1^2(x) & \dots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & y_2^2(x) & \dots & y_2^n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^1(x) & y_n^2(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

je matice hodnot vektorových funkcí y^i. Pak vektorová funkce $z: I \to \mathbf{R}^n$ definovaná formulí

$$z(x) = Y(x)\left(\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)\,dt + Y(x_0)^{-1}y^0\right)$$

je řešením nehomogenní soustavy $y' = Ay + b$ a splňuje počáteční podmínku $z(x_0) = y^0$.

Důkaz. Řešení soustavy $y' = Ay + b$ budeme hledat ve tvaru $z = \sum_{i=1}^n c_i y^i = Yc$, kde $c_i = c_i(x)$ jsou neznámé funkce a c je jejich sloupcový vektor. Protože pro každé $x \in I$ se $\sum_{i=1}^n c_i(x)(y^i)'(x)$ rovná $A(x) \cdot \sum_{i=1}^n c_i(x)y^i(x)$, dosazením $z(x)$ do nehomogenní soustavy dostaneme podmínky na c_i:

$$\begin{aligned} Az + b &= z' = \sum_{i=1}^n c_i(y^i)' + \sum_{i=1}^n c_i' y^i \\ b &= \sum_{i=1}^n c_i' y^i = Yc'. \end{aligned}$$

Protože systém $y^1, \dots, y^n$ je FSŘ soustavy $y' = Ay$, jeho wronskián $W = \det Y$ je v každém bodě $x \in I$ nenulový a matice $Y(x)$ je invertibilní. Takže

$$c' = Y^{-1}b \ \text{ a } \ c(x) = \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)b(t)\,dt + d,$$

kde d je sloupcový vektor konstant. Celkem

$$z(x) = Y(x)\left(\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)\,dt + d\right).$$

Pro $d = Y(x_0)^{-1}y^0$ je splněna počáteční podmínka. $\square$

Popíšeme FSŘ pro homogenní lineární rovnici řádu n s konstantními koeficienty. Je to rovnice

$$R(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

kde $a_i \in \mathbf{R}$ jsou konstanty, $a_n \neq 0$, a $y = y(x)$ je neznámá funkce. Definiční interval I je zde $I = \mathbf{R}$. *Charakteristický polynom* rovnice $R(y) = 0$ je

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Označme $K(p) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid p(\lambda) = 0\}$ množinu jeho kořenů a pro $\lambda \in K(p)$ symbolem $n(\lambda) \in \mathbf{N}$ násobnost kořene. Uvažme množiny funkcí

$$\mathcal{F}(R, \mathbf{C}) = \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \mid \lambda \in K(p), 0 \leq k < n(\lambda)\}$$

a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(R, \mathbf{R}) = \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \mid \lambda \in K(p) \cap \mathbf{R}, 0 \leq k < n(\lambda)\} \\
&\cup \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \sin(\mu x) \mid \lambda + \mu i \in K(p), \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \mu > 0, 0 \leq k < n(\lambda + \mu i)\} \\
&\cup \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \cos(\mu x) \mid \mathrm{dtto}\}.
\end{aligned}$$

Funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ obsahují obecně komplexní exponenciálu. Funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ jsou reálné a $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ vznikl z $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ náhradou dvojic komplexních funkcí $x^k \mathrm{e}^{(\lambda + \mu i)x}$, $x^k \mathrm{e}^{(\lambda - \mu i)x}$ (nereálné kořeny p se vyskytují ve dvojicích $\lambda + \mu i, \lambda - \mu i$ komplexně sdružených kořenů se stejnými násobnostmi) dvojicemi reálných funkcí $x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \sin(\mu x)$, $x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \cos(\mu x)$. Je zřejmé, že $|\mathcal{F}(R, \mathbf{C})| = |\mathcal{F}(R, \mathbf{R})| = n$.[1] Ukážeme, že $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ je FSŘ rovnice $R(y) = 0$. Platí to i o $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$, ale museli bychom pracovat s funkcemi s hodnotami v $\mathbf{C}$.

Lemma 9. *Každá funkce ve $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ i ve $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ je řešením rovnice $R(y) = 0$.*

Důkaz. Protože $(\mathrm{e}^{\lambda x})^{(m)} = \lambda^m \mathrm{e}^{\lambda x}$, pro každý kořen $\lambda \in K(p)$ (p je charakteristický polynom rovnice $R(y) = 0$) máme $R(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \mathrm{e}^{\lambda x} p(\lambda) = 0$ a $\mathrm{e}^{\lambda x}$ je řešením.

[1] Zřejmé je zde to, že v případě třeba $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ máme přesně n různých dvojic parametrů (k, λ) určujících fukce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$. Rozmyslete si, že dvěma různým dvojicím odpovídají dvě různé funkce, takže opravdu $|\mathcal{F}(R, \mathbf{C})| = n$. Podobně pro $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$.

Abychom vyrobili další řešení, uvažme “derivovanou” rovnici řádu $n-1$

$$R'(y) = na_n y^{(n-1)} + \cdots + 2a_2 y' + a_1 y = 0.$$

Její charakteristický polynom je $p'(x)$, derivace charakteristického polynomu původní rovnice. Podobně definujeme rovnici $R''(y) = 0$ atd. Nechť $f = f(x)$ je funkce a $R(f) = R'(f) = 0$. Díky $(xf)^{(m)} = mf^{(m-1)} + xf^{(m)}$ máme

$$R(xf) = R'(f) + xR(f) = 0.$$

Takže

$$R(f) = R'(f) = 0 \Rightarrow R(xf) = 0.$$

Má-li kořen $\lambda \in K(p)$ násobnost $m = n(\lambda)$, je $\mathrm{e}^{\lambda x}$ řešením všech rovnic $R(y) = 0, R'(y) = 0, \ldots, R^{(m-1)}(y) = 0$, protože λ je kořenem všech jejich charakteristických polynomů $p, p', \ldots, p^{(m-1)}$. Opakovaným užitím právě dokázané implikace dostáváme, že $R(\mathrm{e}^{\lambda x}) = R(x\mathrm{e}^{\lambda x}) = \cdots = R(x^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda x}) = 0$. Tím jsme dokázali, že každá funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ je řešením rovnice $R(y) = 0$.

Pro dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda + \mu i, \lambda - \mu i$ v $K(p)$, $\mu > 0$, si označme funkce v odpovídajících dvojicích v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ a v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$:

$$f_1 = x^k \mathrm{e}^{(\lambda+\mu i)x}, f_2 = x^k \mathrm{e}^{(\lambda-\mu i)x}, g_1 = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}\sin(\mu x), g_2 = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}\cos(\mu x).$$

Pak (díky $\mathrm{e}^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

$$g_2 = \frac{f_1 + f_2}{2} \ \text{ a } \ g_1 = \frac{f_1 - f_2}{2i}.$$

Takže (množina řešení rovnice $R(y) = 0$ je uzavřená na lineární kombinace) z $R(f_1) = R(f_2) = 0$ plyne i $R(g_1) = R(g_2) = 0$. Pro reálný kořen $\lambda \in K(p)$ je odpovídající funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ a v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ stejná. Dokázali jsme, že i každá funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ je řešením rovnice $R(y) = 0$. □

Zbývá dokázat lineární nezávislost funkcí v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$. Asi nejjednodušší důkaz je ten, kdy se indukcí dokáže nezávislost funkcí v komplexním systému $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ a z toho se odvodí nezávislost systému $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$, viz A. Pultr, *Skripta z matematické analýzy*, `http://kam.mff.cuni.cz/~pultr/`, kapitola XIX, str. 26. Zde uvádíme o něco složitější důkaz přímo pro reálný systém $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$.

Lemma 10. *Funkce v systému $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Ukážeme, že v systému funkcí (definovaných na $I = \mathbf{R}$)

$$\mathcal{F} = \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \cos(\mu x), x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \sin(\mu x) \mid k \in \mathbf{Z}, \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \mu \geq 0\} \backslash \{f(x) \equiv 0\}$$

není žádná n-tice funkcí lineárně závislá. Protože $\mathcal{F}(R, \mathbf{R}) \subset \mathcal{F}$, budeme tím hotovi.

Uvážíme dva podsystémy $\mathcal{F}^-$ a $\mathcal{F}^0$. Podsystém $\mathcal{F}^-$ obsahuje ty $f \in \mathcal{F}$, které mají $\lambda < 0$ (a libovolné k a μ) nebo mají $\lambda = 0, k < 0$ (a libovolné μ). Podsystém $\mathcal{F}^0$ obsahuje funkce $\cos(\mu x)$ a $\sin(\mu x)$ pro reálná $\mu > 0$ a funkci identicky rovnou 1 (již chápeme jako $\cos(0x)$). Pro každou funkci $f \in \mathcal{F}^-$ zřejmě $f(x) \to 0$ pro $x \to \infty$ a $f' \in Lin(\mathcal{F}^-)$. Tedy pro libovolné $m \in \mathbf{N}$ a $f \in Lin(\mathcal{F}^-)$ máme $f^{(m)} \in Lin(\mathcal{F}^-)$ a $f^{(m)}(x) \to 0$ pro $x \to \infty$. Pokud $f \in \mathcal{F}^0$ má $\mu > 0$ (tedy f není identicky rovná 1) a $m \in \mathbf{N}_0$ je násobek čtyř, pak zřejmě $f^{(m)} = \mu^m f$.

Nechť

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x),\ n \geq 1,\ \alpha_i \in \mathbf{R},\ f_i \in \mathcal{F},\ f_i \neq f_j \text{ pro } i \neq j$$

je netriviální lineární kombinace vzájemně různých funkcí z $\mathcal{F}$. Ne všechny α_i jsou tedy nulové a rovnou předpokládáme, že jsou všechny nenulové. Ukážeme, že pro nějaké $x_0 \in \mathbf{R}$ je $F(x_0) \neq 0$. Nechť $L \in \mathbf{R}$ je největší λ vyskytující se v f_i, $1 \leq i \leq n$, a $K \in \mathbf{Z}$ je největší k vyskytující se v těch f_i, co mají $\lambda = L$. Pak

$$\begin{aligned} F^*(x) = \frac{F(x)}{x^K \mathrm{e}^{Lx}} &= \sum_{i=1}^{m} \beta_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i h_i(x) \\ &= G(x) + H(x), \end{aligned}$$

kde čísla $\beta_i, \gamma_i \in \mathbf{R}$ jsou všechna nenulová, $g_i \in \mathcal{F}^0$, $h_i \in \mathcal{F}^-$, $m \geq 1$, $r \in \mathbf{N}_0$ a funkce g_i a h_i jsou vzájemně různé. První suma vždy obsahuje alespoň jeden sčítanec, ale druhá může být prázdná (pak definujeme $H(x)$ jako $H(x) \equiv 0$). Připomeňme si, že pro každé pevné $m \in \mathbf{N}_0$ a $x \to \infty$ máme $H^{(m)}(x) \to 0$. Nalezneme takové $M \in \mathbf{N}_0$, že $(F^*)^{(M)}(x_0) \neq 0$ pro nějaké $x_0 \in \mathbf{R}$. Pak $F^*(x)$ a $F(x)$ nemohou být identicky nulové na okolí bodu x_0.

Nechť $U_1 \geq 0$ je největší μ vyskytující se v g_i, $1 \leq i \leq m$. Pokud $U_1 = 0$, znamená to, že $G(x) = \beta_1 g_1(x) = \beta_1 \cos(0x) \equiv \beta_1$. Pak $\lim_{x \to \infty} F^*(x) = \beta_1 \neq 0$ a jsme hotovi. Nechť $U_1 > 0$. Jako $U_2 \geq 0$ definujeme druhé největší μ

vyskytující se v g_i, $1 \le i \le m$ (pokud neexistuje, klademe $U_2 = 0$). Položíme $\beta = \max |\beta_i|$, $1 \le i \le m$. Vezmeme tak veliký násobek čtyř $M \in \mathbf{N}$, že

$$\delta = |\beta_1| U_1^M - \beta(m-1) U_2^M > 0$$

(protože $0 \le U_2 < U_1$ a $|\beta_1| > 0$, takové M existuje). Můžeme předpokládat, že největší μ se nabývá v g_1 a že $g_1(x) = \sin(U_1 x)$; pro $r \in \mathbf{N}_0$ položíme $x_r = (2r + 1/2)\pi/U_1$ (pokud $g_1(x) = \cos(U_1 x)$, položíme $x_r = 2r\pi/U_1$). Pak $g_1^{(M)}(x_r) = U_1^M g_1(x_r) = U_1^M$ a $|g_i^{(M)}(x_r)| \le U_2^M$ pro $i > 1$, protože pro $i > 1$ je buď μ v g_i nanejvýš U_2, nebo $g_i(x) = \cos(U_1 x)$, pak ale $|g_i^{(M)}(x_r)| = 0$. Takže, pro všechny $r \in \mathbf{N}_0$,

$$|G^{(M)}(x_r)| \ge |\beta_1 g_1^{(M)}(x_r)| - \sum_{i=2}^{m} |\beta_i g_i^{(M)}(x_r)| \ge |\beta_1| U_1^M - \beta(m-1) U_2^M = \delta > 0.$$

Celkem

$$|(F^*)^{(M)}(x_r)| \ge |G^{(M)}(x_r)| - |H^{(M)}(x_r)| \ge \delta - |H^{(M)}(x_r)|$$

a pro $r > r_0$ máme $|(F^*)^{(M)}(x_r)| > \delta/2 > 0$, čímž jsme hotovi. □

Věta 11. *Systém $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ je FSŘ rovnice $R(y) = 0$. Každé řešení je tedy lineární kombinací n-tice funkcí v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$.*

Důkaz. Víme, že $|\mathcal{F}(R, \mathbf{R})| = n$ a podle dvou předchozích lemmat, že $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ je lineárně nezávislá množina řešení rovnice

$$R(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

jejíž množina řešení má dimenzi n podle tvrzení 6. Je to tedy její FSŘ. □