

### 13. přednáška 3. ledna 2006

V úvodu přednášky zazněl důkaz tvrzení 4, který jsem uvedl v textu k předchozí přednášce.

**3.3. Soustavy lineárních ODR prvního řádu.** Jedna diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu se dá ekvivalentně převést na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu. Je totiž jasné, že funkce  $y = y(x)$  je na intervalu  $I$  řešením rovnice  $n$ -tého řádu

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

právě když  $(n+1)$ -tice funkcí  $y(x), y_1(x), \dots, y_n(x)$  je na intervalu  $I$  řešením soustavy rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1 &= y' \\ y_2 &= y_1' \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1}' \\ F(x, y, y_1, \dots, y_n) &= 0. \end{aligned}$$

Za snížení řádu jsme ovšem zaplatili zavedením dalších  $n$  funkcí. Povšimněme si, že spíše než o skutečnou redukci jednoho problému na druhý se tu jedná o “rozvinutí” značení: symbol  $y''$  je tak jako tak zaveden jen jako zkratka pro  $(y')'$ ,  $y'''$  jen jako zkratka pro  $((y')')'$  atd.

Lineární diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y + b = 0,$$

kde  $a_i(x)$  a  $b(x)$  jsou zadané funkce, je tímto způsobem ekvivalentní dosti speciální soustavě lineárních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1 &= y' \\ y_2 &= y_1' \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1}' \\ y_n + a_{n-1}y_{n-1} + \dots + a_0y + b &= 0. \end{aligned}$$

Budeme se zabývat teorií soustav lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$y'_i = a_{i,1}y_1 + a_{i,2}y_2 + \cdots + a_{i,n}y_n + b_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

kde  $a_{i,j} = a_{i,j}(x)$  a  $b_i = b_i(x)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , je  $n^2 + n$  zadaných funkcí, definovaných na nějakém otevřeném intervalu  $I$ , a  $y_i = y_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , jsou neznámé funkce. V maticovém zápisu,

$$y' = Ay + b,$$

kde  $A : I \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$  a  $b : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  je daná maticová a daná vektorová funkce a  $y : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  je neznámá vektorová funkce. V dalším budeme vždy předpokládat, že funkce  $a_{i,j}(x)$  a  $b_i(x)$  jsou spojité na intervalu  $I$ .

**Věta 5.** *Nechť  $a_{i,j}$ ,  $b_i : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , jsou funkce spojité na otevřeném intervalu  $I \subset \mathbf{R}$ ,  $\alpha \in I$  a  $\beta \in \mathbf{R}^n$ . Potom soustava lineárních diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami*

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= \beta \\ y'(x) &= Ax + b \end{aligned}$$

*má na intervalu  $I$  jediné řešení. To jest existuje jediná  $n$ -tice funkcí  $y_1, \dots, y_n$  z  $C^1(I)$ , která pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  a  $x \in I$  splňuje rovnosti*

$$y_i(\alpha) = \beta_i \quad a \quad y'_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x)y_j(x) + b_i(x).$$

Důkaz věty 5, který je opět založen na větě o kontrahujícím zobrazení, nebudeme na přednášce dělat. Na rozdíl od vět 1 a 2 dostáváme globální existenci a jednoznačnost řešení na celém intervalu  $I$ . Z věty 5 plyne, že pokud se dvě řešení  $z$  a  $u$  soustavy  $y' = Ay + b$  shodují v jednom bodě  $x_0 \in I$  (tj.  $z(x_0)$  a  $u(x_0)$  je tatáž  $n$ -tice z  $\mathbf{R}^n$ ), potom se shodují na celém  $I$ ,  $z(x) = u(x)$  pro  $\forall x \in I$ .

Uvažme množinu řešení homogenní soustavy  $y' = Ay$  a množinu řešení nehomogenní soustavy  $y' = Ay + b$ :

$$H = \{y \in C^1(I)^n \mid y' = Ay \text{ na } I\} \quad a \quad M = \{y \in C^1(I)^n \mid y' = Ay + b \text{ na } I\}.$$

Množina  $n$ -tic funkcí  $C^1(I)^n$  je vektorový prostor nad  $\mathbf{R}$  nekonečné dimenze.

**Tvrzení 6.**  $H$  je vektorový podprostor  $C^1(I)^n$  s dimenzí  $n$ .  $M$  je afinní podprostor  $C^1(I)^n$  s dimenzí  $n$ . Pro každé řešení  $y \in M$  platí, že  $M = y + H = \{y + z \mid z \in H\}$ .

**Důkaz.** Díky linearitě derivování a maticového násobení je zřejmé, že  $H$  je vektorový podprostor: Pokud  $y, z \in H$  a  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , pak  $(\alpha y + \beta z)' = \alpha y' + \beta z' = \alpha Ay + \beta Az = A(\alpha y + \beta z)$  a  $\alpha y + \beta z \in H$ . Stejně se dokážou i implikace  $y, z \in M \Rightarrow y - z \in H$  a  $y \in M, z \in H \Rightarrow y + z \in M$ , které dávají, že  $M = y + H$ . Existence alespoň jednoho řešení  $y \in M$  plyne z věty 5.

Dokážeme, že  $\dim H = n$ ; odtud hned plyne  $\dim M = n$ . Necht  $x_0 \in I$  je libovolné číslo,  $\{e^i \in \mathbf{R}^n \mid 1 \leq i \leq n\}$  je kanonická báze  $\mathbf{R}^n$  ( $i$ -tá složka  $e^i$  je 1 a ostatní jsou nuly) a  $\{y^i \in H \mid 1 \leq i \leq n\}$  jsou řešení homogenní soustavy splňující počáteční podmínky  $y^i(x_0) = e^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ; tato řešení existují podle věty 5. Je jasné (podle hodnot v  $x_0$ ), že  $\{y^1, \dots, y^n\}$  je lineárně nezávislá množina v  $C^1(I)^n$ . Je-li  $y \in H$  libovolné řešení, které má v  $x_0$  hodnoty

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n,$$

potom funkce  $z(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y^i(x)$  patří do  $H$  a  $z(x_0) = y(x_0)$ . Podle věty 5 máme  $z(x) = y(x)$  pro každé  $x \in I$  a tedy  $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y^i$ . Takže  $H = \text{Lin}(\{y^1, \dots, y^n\})$  a  $\dim H = n$ .  $\square$

Každá báze prostoru  $H$  se nazývá *fundamentálním systémem řešení (FSŘ)* homogenní soustavy  $y' = Ay$ .

*Wronského determinant neboli wronskián*  $n$ -tice vektorových funkcí  $f^1, \dots, f^n : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  je funkce  $W : I \rightarrow \mathbf{R}$  definovaná jako

$$W(x) = W_{f^1, \dots, f^n}(x) = \det \begin{pmatrix} f_1^1(x) & f_1^2(x) & \dots & f_1^n(x) \\ f_2^1(x) & f_2^2(x) & \dots & f_2^n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^1(x) & f_n^2(x) & \dots & f_n^n(x) \end{pmatrix}.$$

Připomeňme si, že  $f^1, \dots, f^n$  jsou *lineárně závislé (LZ)*, existují-li konstanty  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ , ne všechny nulové, že pro každé  $x \in I$  platí  $\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(x) = \bar{0}$ . Zřejmé

$$f^1, \dots, f^n \text{ jsou LZ} \implies W_{f^1, \dots, f^n}(x) = 0 \text{ pro } \forall x \in I$$

(matice definující  $W(x)$  má pro každé  $x \in I$  lineárně závislé sloupce). Opačná implikace obecně neplatí (rozmyslete si jako cvičení proč). Nicméně platí v případě, že  $f^1, \dots, f^n$  jsou řešení homogenní soustavy  $y' = Ay$ .

**Tvrzení 7.** *Nechť vektorové funkce  $f^1, \dots, f^n : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  na  $I$  splňují  $(f^i)' = Af^i$ , pro danou maticovou funkci  $A : I \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$  se spojitými položkami, a  $W$  je jejich wronskián. Pak*

$$\exists x \in I : W(x) = 0 \implies f^1, \dots, f^n \text{ jsou LZ}$$

a tedy

$$\exists x \in I : W(x) = 0 \iff \forall x \in I : W(x) = 0.$$

**Důkaz.** Pokud  $W(x_0) = 0$  pro nějaké  $x_0 \in I$ , má matice hodnot vektorových funkcí  $f^i(x_0)$  lineárně závislé sloupce:  $\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(x_0) = \bar{0}$  pro nějaké  $\alpha_i \in \mathbf{R}$ , ne všechny nulové. Vektorová funkce  $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(x)$  též splňuje na  $I$  soustavu  $f' = Af$  a splňuje počáteční podmínku  $f(x_0) = \bar{0}$ . Jiným řešením  $y' = Ay$  splňujícím  $y(x_0) = \bar{0}$  je identicky nulová vektorová funkce. Podle věty 5 se obě řešení na  $I$  rovnají a  $f$  je tedy identicky nulová. Takže  $\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(x) = \bar{0}$  pro každé  $x \in I$  a  $f^1, \dots, f^n$  jsou LZ. V ekvivalenci je implikace  $\Leftarrow$  triviální a  $\Rightarrow$  plyne spojením právě dokázané implikace a implikace uvedené před tvrzením.  $\square$

Wronskián  $n$ -tice řešení  $f^1, \dots, f^n$  homogenní soustavy  $y' = Ay$  je tedy na  $I$  buď vždy nenulový a  $f^1, \dots, f^n$  tvoří FSŘ, nebo je na  $I$  vždy nulový a  $f^1, \dots, f^n$  jsou LZ a netvoří FSŘ.

Následující formule ukazuje, jak z FSŘ homogenní soustavy dostat jedno (tzv. partikulární) řešení soustavy s pravou stranou.

**Tvrzení 8 (metoda variace konstant).** *Nechť  $I \subset \mathbf{R}$  je otevřený interval,  $A : I \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$  a  $b : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  jsou daná maticová a daná vektorová funkce se spojitými položkami a  $y^1, \dots, y^n : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  je FSŘ homogenní soustavy  $y' = Ay$ . Nechť dále  $x_0 \in I$  a  $y^0 \in \mathbf{R}^n$  jsou dané počáteční podmínky a*

$$Y = Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & y_1^2(x) & \dots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & y_2^2(x) & \dots & y_2^n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^1(x) & y_n^2(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

je matice hodnot vektorových funkcí  $y^i$ . Pak vektorová funkce  $z : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  definovaná formulí

$$z(x) = Y(x) \left( \int_{x_0}^x Y(t)^{-1} b(t) dt + Y(x_0)^{-1} y^0 \right)$$

je řešením nehomogenní soustavy  $y' = Ay + b$  a splňuje počáteční podmínku  $z(x_0) = y^0$ .

**Důkaz.** Příště. □