12. přednáška 20. prosince 2005

3.2. Lineární a nelineární ODR prvního řádu. Uvedeme dvě obecné věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice 1. řádu s počáteční podmínkou:

$$(*)\left\{\begin{array}{lcl} y(a) & = & b \\ y'(x) & = & f(x, y(x)). \end{array}\right.$$

Předpokládáme, že rovnicová funkce f je spojitá na nějaké otevřené množině $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Řekneme, že funkce $f(x,y)$ je *lokálně lipschitzovská na množině* Ω *vzhledem k proměnné* y, když pro každý bod $a \in \Omega$ existují konstanty $\varepsilon > 0$ a $K > 0$ takové, že pro každé dva body (x_0, y_1) a (x_0, y_2) z ε-ového okolí bodu a platí $|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| < K|y_1 - y_2|$. Lokální lipschitzovskost vyplývá například ze spojitosti parciální derivace $\partial_y f$ na Ω.

Věta 1 (Picardova). *Nechť* $(a, b) \in \Omega$, $f \in C(\Omega)$ *a* f *je na* Ω *lokálně lipschitzovská vzhledem k proměnné* y. *Potom existuje* $\delta > 0$ *takové, že na intervalu* $(a - \delta, a + \delta)$ *má rovnice* $(*)$ *právě jedno řešení* $y(x)$.

Věta 2 (Peanova). *Nechť* $(a, b) \in \Omega$ *a* $f \in C(\Omega)$. *Potom existuje* $\delta > 0$ *takové, že na intervalu* $(a - \delta, a + \delta)$ *má rovnice* $(*)$ *řešení* $y(x)$.

Větu 1 jsme dokázali jako větu 18 na 5. přednášce. Věta 2, kterou na přednášce dokazovat nebudeme, za slabšího předpokladu dává slabší závěr (obecně se nedostane jednoznačnost).

Příklad. Rovnice $y(0) = 0, y' = xy^{2/3}$ má v okolí 0, fakticky na celém $\mathbf{R}$, dvě řešení: $y_1(x) \equiv 0$ a $y_2(x) = x^6/6^3$. Obecněji, zvolíme-li $c > 0$, potom funkce $y(x)$ definovaná jako $(x^2 - c)^3/6^3$ pro $x \in \mathbf{R}\backslash(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ a jako 0 pro $x \in [-\sqrt{c}, \sqrt{c}]$ je řešením. Funkce $f(x, y) = xy^{2/3}$ je totiž spojitá v bodě $(0, 0)$, ale není v jeho okolí lipschitzovská vzhledem k y.

Důsledek 3. *Nechť* $f \in C(\Omega)$ *je na* Ω *lokálně lipschitzovská vzhledem k proměnné* y. *Pokud se dvě řešení diferenciální rovnice* $y'(x) = f(x, y(x))$ *shodují v alespoň jednom bodě, potom se shodují na celém průniku svých definičních oborů.*

Důkaz. Nechť (y_1, I) a (y_2, J) jsou dvě řešení rovnice $y'(x) = f(x, y(x))$, přičemž $y_1(a) = y_2(a)$ pro nějaké $a \in I \cap J$. Ze spojitosti funkcí y_1 a y_2

plyne, že množina $M = \{x \in I \cap J \mid y_1(x) = y_2(x)\}$ je uzavřená (v otevřeném intervalu $I \cap J$). Podle věty 1 je M též otevřená. Takže M je neprázdná obojetná podmnožina souvislého intervalu $I \cap J$ a nutně $M = I \cap J$. $\square$

Lineární rovnice. Vyřešíme lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Zde $y = y(x)$ je neznámá funkce a funkce $a(x)$ a $b(x)$ jsou funkce definované a spojité na nějakém otevřeném intervalu I. Řešení, které nalezneme, je definované na celém intervalu I a volbou integrační konstanty lze splnit libovolnou počáteční podmínku. Podle důsledku 3 je takové řešení jednoznačné.

Řešení metodou integračního faktoru. Nejprve nalezneme takovou funkci $c = c(x)$, tzv. integrační faktor, že $c(y' + ay) = (cy)'$. Pak $cy' + acy = cy' + c'y$ a c musí splňovat rovnici $ac = c'$, čili $(\log c)' = a$. Funkce $c = \mathrm{e}^A$, kde $A = A(x)$ je nějaká primitivní funkce k $a(x)$, má tedy požadovanou vlastnost. Výchozí lineární rovnici vynásobíme integračním faktorem a dostaneme

$$(cy)' = c(y' + ay) = cb.$$

Takže $(cy)' = cb$ a $cy = D + c_0$, kde D je primitivní funkce k cb a c_0 je integrační konstanta. Máme řešení $y = c^{-1}(D + c_0)$. Shrnuto,

$$y(x) = \mathrm{e}^{-A(x)} \left(\int \mathrm{e}^{A(x)} b(x)\, dx + c_0 \right), \quad \text{kde } A(x) = \int a(x)\, dx.$$

Všimněte si, že $y(x)$ je definovaná na celém I (definičním oboru funkcí a a b) a že každé počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$ odpovídá přesně jedna hodnota integrační konstanty c_0, pro níž je splněna. Zavedení integrační konstanty pro A, tj. nahrazení $A(x)$ obecnějším výrazem $A(x) + c_1$, už nedává obecnější řešení, které by se nedalo dostat jen s pomocí konstanty c_0.

Řešení metodou variace konstant. Nejprve vyřešíme homogenní rovnici $y' + ay = 0$. Odtud $y'/y = -a$ a $(\log y)' = -a$. Dostáváme $\log y = -A + c$ a $y = \mathrm{e}^c \mathrm{e}^{-A} = K\mathrm{e}^{-A}$, kde A je primitivní funkce k a a c a K jsou konstanty. Konstantu K v řešení $y(x) = K\mathrm{e}^{-A(x)}$ homogenní rovnice nahradíme funkcí $K = K(x)$ a obecnou funkci $K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ dosadíme do původní rovnice, čímž dostaneme podmínku na $K(x)$:

$$\begin{aligned} (K\mathrm{e}^{-A})' + a \cdot K\mathrm{e}^{-A} &= b \\ K'\mathrm{e}^{-A} - Ka\mathrm{e}^{-A} + Ka\mathrm{e}^{-A} &= b \\ K' &= b\mathrm{e}^{A}. \end{aligned}$$

Takže $K(x) = \int b(x)\mathrm{e}^{A(x)}\ dx + c$ a po dosazení do $y(x) = K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ dostáváme opět shora uvedený vzorec.

Příklad. Volný pád s odporem prostředí. Uvažujme částici o hmotnosti m, která z klidu padá vlivem konstantní tíže a na kterou kromě tíže působí i odpor prostředí. Předpokládejme, že síla odporu závisí lineárně na rychlosti částice—to je samozřejmě zjednodušení, ve skutečnosti je závislost složitější. Newtonův zákon síly dává pohybovou rovnici

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \text{tíže} - \text{odpor} = mg - kv,$$

kde $v = v(t)$ je rychlost částice v čase t, g je konstanta tíhového zrychlení a $k > 0$ je konstanta odporu prostředí. Máme lineární diferenciální rovnici

$$v' + av = b,$$

kde $a = k/m$ a $b = g$ jsou konstanty. Integrační faktor tedy je $c = \mathrm{e}^{kt/m}$ a podle hořejšího vzorce máme řešení

$$v(t) = \frac{mg}{k} + c_1\mathrm{e}^{-kt/m}.$$

Z počáteční podmínky $v(0) = 0$ vypočteme hodnotu integrační konstanty $c_1 = -mg/k$. Takže

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}\right).$$

Pro $t \to \infty$ se tedy rychlost částice blíží k limitní rychlosti

$$v_{lim} = \frac{mg}{k}.$$

Tento vzorec plyne také uvážením rovnovážného stavu, kdy se tíže rovná síle odporu.

Rovnice se separovanými proměnnými. Je to diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f(x)g(y),$$

kde $f(x)$ a $g(y)$ jsou funkce definované a spojité na nějakém otevřeném intervalu I a $g \neq 0$ na I. Jedná se obecně o nelineární diferenciální rovnici, v níž na pravé straně můžeme od sebe oddělit—separovat—proměnné x a y.

Rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

a ten přepíšeme pomocí funkce $G(t)$, jež je primitivní k funkci $1/g(t)$ na intervalu I, jako $G(y(x))' = f(x)$. Odtud dostáváme vztah $G(y(x)) = F(x) + c$, kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ na I a c je integrační konstanta. Řešení původní diferenciální rovnice je tedy dáno jako implicitní funkce vztahem

$$G(y(x)) = F(x) + c, \quad \text{kde} \quad G(t) = \int \frac{dt}{g(t)} \quad \text{a} \quad F(x) = \int f(x)\, dx.$$

Postup při řešení rovnice se separovanými proměnnými se obvykle zapisuje takto:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)g(y) \\
g(y)^{-1}\mathrm{d}y &= f(x)\mathrm{d}x \\
\int g(y)^{-1}\, \mathrm{d}y &= \int f(x)\, \mathrm{d}x \\
G(y) &= F(x) + c.
\end{aligned}$$

Dva důležité speciální případy jsou rovnice $y' = f(x)$ a $y' = g(y)$. Řešení první z nich jsou právě funkce primitivní k $f(x)$ na I. Řešení rovnice $y' = g(y)$ je dáno implicitně jako $G(y(x)) = x+c$ a je to tedy funkce inverzní ke $G(x)+c$:

$$y(x) = \left(\int \frac{dx}{g(x)} + c\right)^{\langle -1\rangle}.$$

Příklad. Druhá kosmická rychlost. Jakou rychlostí v_0 musíme vymrštit těleso z povrchu Země, aby nikdy nedopadlo zpět? Zanedbáme odpor vzduchu, ale pochopitelně už nemůžeme zanedbat změnu tíže s výškou. Ve výšce x nad zemským povrchem na těleso o hmotnosti m působí podle Newtonova gravitačního zákona tíže $mgR^2(x+R)^{-2}$, kde g je konstanta tíhového zrychlení na zemském povrchu a R je poloměr Země. (Podle zákona převrácených čtverců je tíže ve výšce x rovna $K(R+x)^{-2}$, kde K je konstanta. Pro $x = 0$ je tíže mg, takže K musí být mgR^2.) Podle Newtonova zákona síly jsou rychlost $v = v(t)$ a výška $x = x(t)$ tělesa v čase t svázány vztahem

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2},$$

přičemž $v(0) = v_0$. Pomocí vztahu

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot v$$

(derivace složené funkce) přejdeme od nezávisle proměnné t k nezávisle proměnné x a dostaneme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými

$$v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}.$$

Počáteční podmínka $v = v_0$ pro $t = 0$ přejde na $v = v_0$ pro $x = 0$, protože $x(0) = 0$. Integrací

$$v\,dv = -\frac{gR^2\,dx}{(x+R)^2}$$

dostaneme

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x+R} + c.$$

Z $v(0) = v_0$ vypočteme $c = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$ a pro rychlost tělesa ve výšce x získáme vztah

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R}.$$

Pokud $v_0^2 < 2gR$, rychlost v pro velkou výšku x není definovaná, což znamená, že s počáteční rychlostí v_0 těleso výšky x nikdy nedosáhne. Naopak pokud $v_0^2 \geq 2gR$, těleso dosáhne každou výšku. Úniková rychlost z povrchu Země, tzv. druhá kosmická rychlost, se tedy rovná

$$v_0 = \sqrt{2gR} \approx 11.2 \text{ km/s}$$

($g \approx 9.81$ ms^{-2} a $R \approx 6380$ km).

Exaktní rovnice. Je to diferenciální rovnice tvaru

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0,$$

kde M a N jsou dané funkce dvou proměnných definované na nějakém obdélníku $R \subset \mathbf{R}^2$, pro niž existuje taková funkce $\varphi = \varphi(x,y)$, že na R platí $\partial_x \varphi = M$ a $\partial_y \varphi = N$.

Rovnici pak přepíšeme jako $\varphi(x, y(x))' = 0$ a její řešení $y = y(x)$ je dáno implicitně vztahem

$$\varphi(x, y(x)) = c,$$

kde c je konstanta. Například rovnice se separovanými proměnnými $y' = f(x)g(y)$, to jest $-f + g^{-1}y' = 0$, je exaktní, protože pro ni můžeme vzít $\varphi(x,y) = -F(x) + G(y)$, kde $F = \int f\ dx$ a $G = \int g^{-1}\ dy$.

Tvrzení 4. *Nechť funkce dvou proměnných M, N, $\partial_y M$ a $\partial_x N$ jsou spojité na obdélníku $R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ (povolujeme $\alpha = -\infty$ atd.). Diferenciální rovnice*

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

je exaktní na R, právě když na R platí $\partial_y M = \partial_x N$. Je-li tato podmínka splněna, potom, pro libovolný pevný bod $(x_0, y_0) \in R$, funkce

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)\ ds + \int_{y_0}^{y} \left(N(x,t) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(s,t)\ ds \right)\ dt$$

splňuje na R vztahy $\partial_x \varphi = M$ a $\partial_y \varphi = N$ a řešení diferenciální rovnice je implicitně dáno vztahem $\varphi(x, y(x)) = c$.

Důkaz. Pokud je rovnice exaktní a φ existuje, díky záměnnosti parciálních derivací (tvrzení 10 z 2. kapitoly) na R platí $\partial_y M = \partial^2_{xy}\varphi = \partial^2_{yx}\varphi = \partial_x N$ a tedy $\partial_y M = \partial_x N$ (zde jsme potřebovali spojitost $\partial_y M$ a $\partial_x N$).

Naopak, nechť na R platí $\partial_y M = \partial_x N$. Dokážeme, že funkce φ definovaná ve znění tvrzení splňuje $\partial_x \varphi = M$ a $\partial_y \varphi = N$. Funkce $h(x,t) = N(x,t) - \int_{x_0}^{x} \partial_y M(s,t)\ ds$ nezávisí na x, protože $\partial_x h(x_1, t) = \partial_x N(x_1, t) - \partial_y M(x_1, t) = 0$ a h je pro pevné t jako funkce x konstantní. Druhý sčítanec ve formuli definující φ je, navzdory značení, funkce $f(y)$ závisející jen na y a ne na x. Při parciální derivaci podle x zmizí a $\partial_x \varphi(x_1, y) = M(x_1, y)$.

Abychom dokázali rovnost $\partial_y \varphi = N$, ukážeme, že v každém bodě $(x, y_1) \in R$ má funkce

$$g(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)\ ds$$

parciální derivaci

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y_1) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(s, y_1)\ ds.$$

Odtud dostaneme

$$\partial_y \varphi(x,y_1) = \partial_y g(x,y_1) + N(x,y_1) - \int_{x_0}^{x} \partial_y M(s,y_1)\, ds = N(x,y_1).$$

Nechť tedy $(x, y_1) \in R$ a $x \geq x_0$; případ $x \leq x_0$ je podobný. Nechť dále $h > 0$ a $y_1 + h < \delta$; případ $h < 0$ a $\gamma < y_1 + h$ je podobný. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje taková funkce $\theta(s)$, že pro každé $s \in [x_0, x]$ máme $0 < \theta(s) < h$ a $M(s, y_1 + h) - M(s, y_1) = h \cdot \partial_y M(s, y_1 + \theta(s))$. Takže

$$\begin{aligned}
\frac{g(x,y_1+h) - g(x,y_1)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x} M(s,y_1+h)\, ds - \int_{x_0}^{x} M(s,y_1)\, ds\right) \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{M(s,y_1+h) - M(s,y_1)}{h}\, ds \\
&= \int_{x_0}^{x} \partial_y M(s, y_1 + \theta(s))\, ds.
\end{aligned}$$

Protože $\partial_y M$ je stejnoměrně spojitá na každé uzavřené a omezené podmnožině R (viz věty 9 a 10 z 1. kapitoly), pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\eta > 0$, že

$$s \in [x_0, x] \;\&\; \theta \in [0, \eta] \Rightarrow |\partial_y M(s, y_1 + \theta) - \partial_y M(s, y_1)| < \varepsilon.$$

Pro $h < \eta$ pak

$$\left| \int_{x_0}^{x} \partial_y M(s, y_1 + \theta(s))\, ds - \int_{x_0}^{x} \partial_y M(s, y_1)\, ds \right|$$

je nejvýše

$$\int_{x_0}^{x} |\partial_y M(s, y_1 + \theta(s))\, ds - \partial_y M(s, y_1)|\, ds < (x - x_0)\varepsilon.$$

Proto pro každé h splňující $0 < h < \eta$ (a $y_1 + h < \delta$) máme

$$\left| \frac{g(x,y_1+h) - g(x,y_1)}{h} - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(s, y_1)\, ds \right| < (x - x_0)\varepsilon.$$

Pro $\varepsilon \to 0$ dostáváme $\partial_y g(x, y_1) = \int_{x_0}^{x} \partial_y M(s, y_1)\, ds$. □

Příklad. Vyřešte rovnici

$$(y \cos x + 2x\mathrm{e}^y) + (\sin x + x^2 \mathrm{e}^y + 2)y' = 0.$$

Rovnice je na $R = \mathbf{R}^2$ exaktní, protože $\partial_y M = \partial_x N = \cos x + 2x\mathrm{e}^y$. Z

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)\, ds + f(y) = \int_{x_0}^{x} (y\cos s + 2s\mathrm{e}^y)\, ds + f(y)$$

máme

$$\varphi(x,y) = y\sin x + x^2\mathrm{e}^y + F(y),$$

čímž je splněna podmínka $\partial_x\varphi = M$. Ze $\sin x + x^2\mathrm{e}^y + 2 = N = \partial_y\varphi = \sin x + x^2\mathrm{e}^y + F'(y)$ máme $F'(y) = 2$. Takže $F(y) = 2y$, $\varphi(x,y) = y\sin x + x^2\mathrm{e}^y + 2y$ a řešení $y = y(x)$ je dáno implicitně vztahem

$$y\sin x + x^2\mathrm{e}^y + 2y = c.$$