

Příklady • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 + 3n} = ?$ $b_n = \frac{1}{n}$ a limitní srov. krit.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{a_n}$

Tabule mm.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n} = ?$ $b_n = \frac{1}{2^n}$ a limitní srov. krit.

$\underbrace{\hspace{5em}}_{a_n}$

$1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

Srovnávání s geometrickou řadou (přípomenují: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konv. \Leftrightarrow $|q| < 1$)

Věta 2.17 (Cauchyovo odměrné kritérium)

$|q| < 1$

Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s ≥ 0 členy, tj. $a_n \geq 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. $\exists q, 0 < q < 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow a_n^{1/n} < q$. Pak řada konverguje.

2. $\limsup a_n^{1/n} < 1 \Rightarrow$ řada konv.

3. $\lim a_n^{1/n} < 1 \Rightarrow$ —||—

4. $\limsup a_n^{1/n} > 1 \Rightarrow$ řada diverguje

5. $\lim a_n^{1/n} > 1 \Rightarrow$ —||—

$$a_n^{1/n} = \sqrt[n]{a_n}$$

D. 1. $b_n := q^n$, $\sum b_n$ konv., $\exists a_n^{1/n} < q$ máme $a_n < q^n$ a použijeme srovnávací kritérium. $\sum b_n = 1 + q + q^2 + \dots$ - geom. řada

2. $\limsup a_n^{1/n} = q < 1$. Vezmu $q', q < q' < 1 \rightarrow \exists x. u_0, \forall u > u_0 \Rightarrow a_n^{1/n} < q'$.
 Použijeme 1.

3. Plyne z 2 ($\lim = \limsup$, když $\exists ex.$)

4. $\limsup a_n^{1/n} = q > 1 \rightarrow \exists x. \text{podposl. } (a_{2n}), \forall \epsilon a_{2n}^{1/2n} \rightarrow q > 1$, když $\exists x. u_0, \forall u > u_0 \Rightarrow a_{2n}^{1/2n} > 1 \rightarrow a_{2n} > 1 \rightarrow \sum a_n$ diverguje (nemí splněna nutná podmínka, že $a_n \rightarrow 0$).

5. Plyne z 4 ($\lim = \limsup$). ☒

Věta 2.18 (d'Alambertovo podíkové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s $a_n > 0$ členy, tj. $a_n > 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

- $\exists q, 0 < q < 1, \exists u_0 \in \mathbb{N} : u \geq u_0 \Rightarrow \frac{a_{u+1}}{a_u} < q$. Pak řada konverguje.
- $\limsup \frac{a_{u+1}}{a_u} < 1 \Rightarrow$ řada konverguje.

3. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow$ řada konverguje.

4. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$ řada diverguje.

D. 1. $a_{n_0+1} < q a_{n_0}, a_{n_0+2} < q a_{n_0+1} < q^2 a_{n_0}, \dots$; vezmeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n =$
 $= \underbrace{0+0+\dots+0}_{\text{no členů}} + \underbrace{q a_{n_0} + q^2 a_{n_0} + q^3 a_{n_0} + \dots}_{= a_{n_0} (q + q^2 + q^3 + \dots)}$ a použijeme srovnání kritérium.
 $a_n < b_n$
 pro $n > n_0$.

2. Plyne z 1, protože ex. $q' < 1$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q'$.

3. Plyne z 2 ($\lim = \lim \sup$)

4. Nyní ex. $q > 1$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow a_{n+1} > q a_n$. Takže
 $a_{n_0+1} > q a_{n_0}, a_{n_0+2} > q a_{n_0+1} > q^2 a_{n_0}, \dots$ speciálně: $n > n_0 \Rightarrow a_n > a_{n_0}$. Řa-
 da nesplňuje $a_n \rightarrow 0$, proto diverguje. □

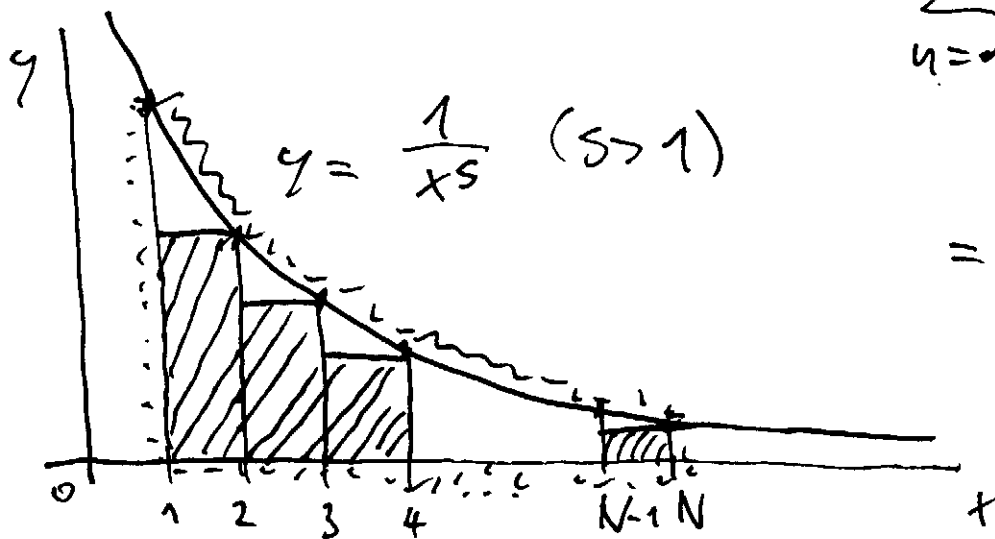
Poznámka. Nevodil od C. odn. krit. nepřekážá, že $\lim \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$
 \Rightarrow řada diverguje. Příklad: řada \dots

Poznámka. Pokud lim $a_n^{1/n} = 1$, C-ovo odm. kritérium neurčí nic (řada může být konv. i diver.). Totéž, když lim $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, d.A-ovo pod. kritérium neurčí nic.

Příklady. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, tabulka ~~~~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $1 \in \mathbb{R}$,

Konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ pro $s > 1$.

1. důkaz pomocí integrálu.



$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} &= 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^s} \leq 1 + \text{plocha pod} \\ &\quad \text{grafem, v in-} \\ &\quad \text{tervalu } [2, N] \\ &= 1 + \int_2^N \frac{dx}{x^s} = 1 + \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_2^N = \\ &= 1 + \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{N^{s-1}} - \frac{1}{2^{s-1}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{2^{s-1}} - \frac{1}{N^{s-1}} \right) < 1 + \frac{1}{(s-1)2^{s-1}}. \end{aligned}$$

Takže Část. součty $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s}$ jsou shora omezení a ex. vlastní

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s}$$

2. důkaz pomoci Cauchyova kritéria

Věta 2.19 (Cauchyovo kritérium) Necht' $(a_n) \subset \mathbb{R}$ splňuje

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 8a_8 + 16a_{16} + \dots$ konverguje.

Aplikace: Necht' $s > 1$, vezmeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ // $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^k$

Řadu $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{s-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{s-1})^k}$... to je ale

geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{2^{s-1}} < 1$ (protože $s-1 > 0$), která konverguje, takže podle C. kritéria i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konverguje.

Zbývá ovšem ~~to~~ dokázat Cauchyovo kritérium.