# Řady reálných čísel

(nekonečná) řada je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, kde $(a_n)_{n\geq 1}$ je posl. reálných čísel. Pozn. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, $\sum_{n\geq 3} a_n$, $\sum_{i=8}^{\infty} b_i$, ...

n-tý částečný součet řady: $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Součet řady: je limita posl. část. součtů $L = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$, když existuje. Pak píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\dots+a_n) = \begin{cases} L \in \mathbb{R} & \text{– konvergentní řada} \\ +\infty & \\ -\infty & \text{– divergentní ř.} \\ \text{neex.} & \end{cases}$$

Příklady. • $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ je divergentní, • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní (jak hned uvidíme)

• $\sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$, • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je konvergentní.

# Dvě důležité řady

**(1.) Geometrická řada** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$, kde $q \in \mathbb{R}$.

$q$ … kvocient

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \cdots \ |q|<1, \text{ tj } -1<q<1 \\ +\infty & \cdots \ q \geq 1 \\ \text{neex.} & \cdots \ q \leq -1 \end{cases} \Bigg\} \text{ diverguje}$$

$\underline{D}$. Část. součet je $s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Protože $q^n \to 0$ pro $n \to \infty$, když $|q|<1$, máme i $\lim s_n = \lim \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} = \dfrac{-1}{q-1} = \dfrac{1}{1-q}$ pro $|q|<1$.
Pro $q \geq 1$ máme $\lim s_n \geq \lim q^n = +\infty$. $\rightsquigarrow \lim s_n = +\infty$. Pro $q \leq -1$ $\lim s_n$ neexistuje. $\boxtimes$

**(2.) Řada** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s} = 1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \cdots$, kde $s \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konverguje pro } s > 1 \\ = +\infty \text{ pro } s \leq 1 \end{cases} \quad \text{(uvidíme později)}.$$

$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$

(d) zeta funkce

**Věta 2.12** (podmínky konvergence řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel. Pak

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Longrightarrow \lim a_n = 0$ (opačná implikace obecně neplatí)
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 : m \geq n > n_0 \Longrightarrow \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| =$
(Cauchyova podmínka pro řady) $= |a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon.$

D. ~~ ~~ tabule. ⊠

Harmonická řada

Příklad. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = +\infty$, tato řada diverguje, podle podmínky 2 (více-méně $\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq 1/2$), ale $\lim \frac{1}{n} = 0$. Protože pro $s \leq 1$ máme $\frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{n}$, ze stejného důvodu i $s \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = +\infty$.

<u>Pozn.</u> Pro řadu s nezápornými členy, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s $a_n \geq 0$, buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje nebo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$

<u>absolutní konvergence</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>konverguje absolutně</u>, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

**Tvrzení 2.13** (abs. konvergence $\Rightarrow$ konvergence)

Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, potom konverguje.

<u>D.</u> ~~$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$~~ pomocí C. podmínky, tabule $\boxtimes$

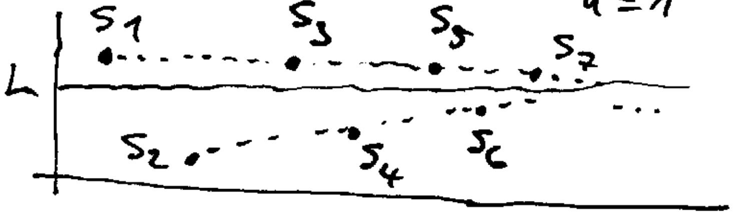
<u>Pozn.</u> Opačná implikace obecně neplatí. Např. řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$ konverguje, jak hned uvidíme, ale řada abs. hodnot $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

$\boxed{\text{Věta 2.14}}$ (Leibnizovo kritérium)

Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ splňuje, že $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$ a $\lim a_n = 0$.

Potom $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje

<u>D.</u> Tabule ~~~




$\rightsquigarrow \lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ ex. ⊠

<u>Příklady.</u> $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$ obě konvergují
$(= \log 2)$ $\qquad$ $\left(= \frac{\pi}{4}\right)$

obě neabsolutně!

$\boxed{\text{Tvrzení 2.15}}$ (lin. kombinace řad)

1. $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ konverguje. a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\sum_{n \geq 1} a_n$, $\sum_{n \geq 1} b_n$ konvergují $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} (\alpha a_n + \beta b_n)$ konverguje a $\sum_{n \geq 1} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n \geq 1} a_n + \beta \sum_{n \geq 1} b_n$. <u>D.</u> cvičení, aritmetika limit ⊠

Pozn. Opačná implikace ve 2 samozřejmě obecně neplatí: $\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right) = 0+0+0+\dots$ konverguje, ale $\sum (-1)^n$, $\sum (-1)^{n+1}$ nekonvergují.

$\boxed{\text{Tvrzení 2.16}}$ (srovnávací kritéria řad)

$\sum a_n$, $\sum b_n$ buďte řady s $\geq 0$ členy.

1. Ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n$. Pak $\sum b_n$ konv. $\Rightarrow \sum a_n$ konv. (a tedy $\sum a_n$ diver. $\Rightarrow \sum b_n$ diver.).
2. Nechť $\lim \frac{a_n}{b_n} = K$ ($K \in \mathbb{R}^*$, $K \geq 0$). Potom

$$0 < K < +\infty \Rightarrow \left(\sum a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum b_n \text{ konv.}\right)$$
$$K = 0 \Rightarrow \left(\sum b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ konv.}\right)$$
$$K = +\infty \Rightarrow \left(\sum a_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum b_n \text{ konv.}\right)$$

D. Tabule ~~~~~~

$\boxtimes$