Připomeňme si, že $(a_n)_{n\geq 1}$ je cauchyovská, když
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n > n_0$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Věta 2.5 (konvergence $\Leftrightarrow$ cauchyovskost)

Posloupnost $(a_n)_{n\geq 1}$ je konvergentní, právě když je cauchyovská.

D. $\Rightarrow$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Ex. n_0, že $n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Podle Δ-ové nerv. máme $m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| = |(a_m - L) + (L - a_n)| \leq |a_m - L| + |a_n - L| < 2\varepsilon$.
Takže $(a_n)_{n\geq 1}$ je cauchyovská.

$\Leftarrow$ Nechť $(a_n)_{n\geq 1}$ je cauchyovská. Pak je omezená a podle V. 2.4 má konv. podposloupnost: ex. posl. přir. čísel $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots$ a $L \in \mathbb{R}$ tak, že $a_{k_n} \to L$ pro $n \to \infty$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow |a_{k_n} - L| < \varepsilon$. Dále, díky cauchyovskosti, ex. $n_1 \in \mathbb{N}$, že $m, n > n_1 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$. Ukážeme, že celá posl. $(a_n)_{n\geq 1}$ konverguje k L. Pro $n > \max(n_0, n_1)$ díky Δ-ové nerovnosti máme $|a_n - L| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - L| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Posl. $(a_n)_{n\geq 1}$ tedy konverguje k L. $\square$

~~Aritmetika~~ <u>Příklady</u>. 1. Posl. $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, $a_n = (-1)^n$, není cauchyovská (a tedy ani konvergentní), protože $|a_n - a_{n+1}| = 2$ pro $\forall n$.

2. Posl. $\left(1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \dots\right)$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, není cauchyovská (a tedy ani konvergentní), protože

$$|a_{2n} - a_n| = \left|\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right| = \cancel{|}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\cancel{|} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ krát}} =$$

$$= \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$ Tudíž $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

<u>Aritmetika limit</u> (limity a aritm. operace $+, \cdot$ a relace $<$)

$\boxed{\text{Tvrzení 2.6}}$ (limita a $<$) Nechť $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ a $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$.

a) Když ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ platí $a_n \geq b_n$, pak $A \geq B$.

b) Když $A > B$, pak ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n > n_0$ platí $a_n > b_n$.

<u>D</u>. ~~~~~ (tabule) $\boxtimes$

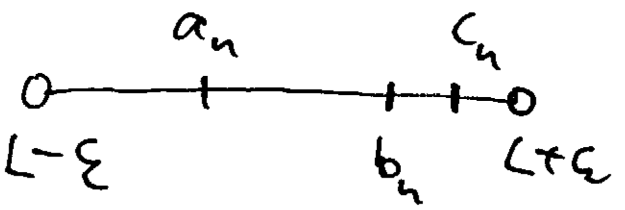
Poznámka I když $a_n < b_n$ pro $n > n_0$, může platit $\lim a_n = \lim b_n$ – * ostrá ~~limita~~ nerovnost může v limitě přejít v rovnost. Například $(0,0,0,\ldots) \to 0$ pro $n \to \infty$ a $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots) \to 0$ pro $n \to \infty$.

$\boxed{\text{Tvrzení 2.7}}$ („věta o dvou policajtech") $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}, (c_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ splňují:

- ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$
- $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} c_n = L$.

Potom i $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = L$.

D. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Ex. $N \in \mathbb{N}$, že $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$ & $|c_n - L| < \varepsilon$. Běřme $N > n_0$. Pak i $|b_n - L| < \varepsilon$ a tedy $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = L$. ($\{x \in \mathbb{R} : |x - L| < \varepsilon\}$ = interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon) =: U$; $a_n, c_n \in U \Rightarrow [a_n, c_n] \subset U$; ⊠



tedy i $b_n \in U$ a $|b_n - L| < \varepsilon$.

$\boxed{\text{Tvrzení 2.8}}$ (limita a $+, \cdot, :$) $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$,
$\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$. Potom

1. $\lim (a_n \pm b_n) = A \pm B$ (obecněji: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak $\lim(\alpha a_n + \beta b_n) =$
$= \alpha A + \beta B$).

2. $\lim a_n b_n = AB$.

3. Pokud $b_n \neq 0$ pro $\forall n$ a $B \neq 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

D. 1. $|(a_n+b_n) - (A+B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$

...

2. $|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leq$

$$\leq |a_n - A| \cdot |b_n| + |A| \cdot |b_n - B|, \ldots$$

3. $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \frac{|a_n B - A b_n|}{|b_n B|} = \frac{|a_n B - \overset{AB}{\cancel{a_n b_n}} + \overset{AB}{\cancel{a_n b_n}} - A b_n|}{|b_n B|} \leq$

$\leq \frac{1}{|b_n| \cdot |B|} \left(|a_n - A| \cdot |B| + |A| \cdot |b_n - B| \right), \ldots$

$\boxtimes$

$\boxed{\text{Tvrzení 2.9}}$ (násobení nulou a limita) $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, $\lim a_n = 0$ a posl. $(b_n)_{n\geq 1}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.

D. Cvičení. $\boxtimes$

Nevlastní limity posloupností

$(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$. Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$: $\forall c \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow a_n > c$.

— " — $= -\infty$: ————— " ————— $a_n < c$.

Příklady $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^3) = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^n$ neex. (ani nevlastní)

limita posloupnosti
- existuje
  - vlastní } konvergentní posl.
  - nevlastní
    - $+\infty$
    - $-\infty$
- neexistuje

(nevlastní $\pm\infty$ a neexistuje) } divergentní posl.

Rozšířená reálná osa $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$\forall a \in \mathbb{R}: -\infty < a < +\infty$; $|\pm\infty| = +\infty$; $\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq -\infty: +\infty + a = +\infty$

$\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq +\infty: -\infty + a = -\infty$;

$\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0: a(\pm\infty) = \pm\infty$

$\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0: a(\pm\infty) = \mp\infty$; $\forall a \in \mathbb{R}: \frac{a}{\pm\infty} = 0.$

Nedefinováno (neurčité výrazy): $(-\infty) + (+\infty)$; $0 \cdot (\pm\infty)$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\frac{\text{cokoli}}{0}$.