Připomeňme si $\triangle$-ovou nerovnost: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ platí, že $|a+b| \leq |a| + |b|$.
Důsledek: $|a-b| \geq |a| - |b|$.

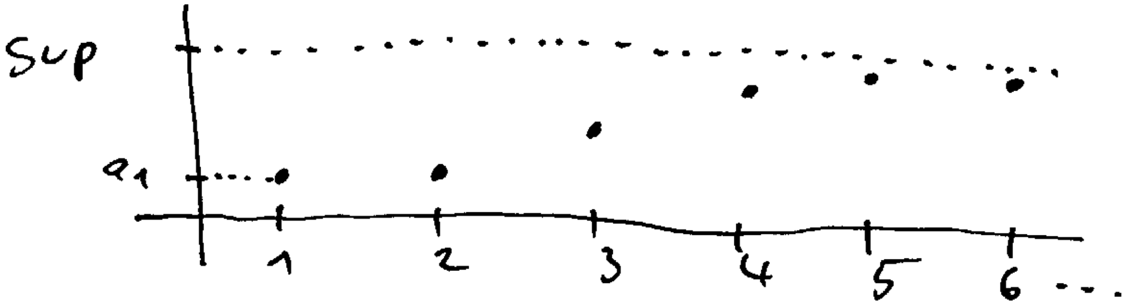
Obecné věty o konvergenci posloupností

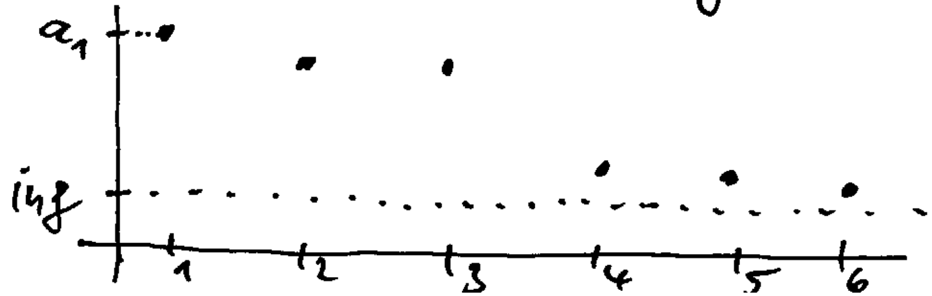
Věta 2.2 (monotonie $\Rightarrow$ konvergence)

Když je $(a_n)_{n \geq 1}$ neklesající a shora omezená, potom je konvergentní a $\lim a_n = \sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$.

Důkaz. $s := \sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$. Pak $a_n \leq s$ pro $\forall n$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Ex. m, že $a_m > s - \varepsilon$ (z vl. suprema). Protože $a_m \leq a_n$ pro $m \leq n$, máme: $n > m \Rightarrow s - \varepsilon < a_n \leq s < s + \varepsilon$, tj. $|s - a_n| < \varepsilon$. $\boxtimes$

Poznámka Podobně: $(a_n)_{n \geq 1}$ nerostoucí a zdola om. $\Rightarrow \lim a_n = \inf(-\|-)$.





$\boxed{\text{Příklad}}$ Uvažme rekurentní posl. $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, kde $x_1 = 2$ a $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$ pro $n \geq 1$. Takže $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{17}{12}$, … Dokážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

D. Ukážeme, že to je ~~klesající~~ nerostoucí a zdola omezená posl. To druhé je jasné (protože $x_n > 0$ pro $\forall n$) a pro to první budeme muset nejprve ukázat, že $x_n \geq \sqrt{2}$ pro $\forall n$. Nerovnost mezi AP a GP: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Tudíž $\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n} \cdot \frac{x_n^2 + 2}{2} \geq \frac{1}{x_n}\sqrt{2x_n^2} = \sqrt{2}$. Nyní monotonie:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \leq x_n \iff \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{2}x_n \iff 2 \leq x_n^2 \iff \sqrt{2} \leq x_n.$$

Podle V.2.2 existuje $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (a $A \geq \sqrt{2}$). Výpočet limity (některé kroky zdůvodníme později): $\underline{x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}}$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Když $x_n \to A$, tak i $x_{n+1} \to A$ a $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{A}$ a $\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{2}A + \frac{1}{A}$. Máme rovnici $\underline{A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{A}}$ $\rightsquigarrow$ $A^2 = 2$, $A = \cancel{\pm}\sqrt{2}$, $\underline{\underline{A = \sqrt{2}}}$. $\boxtimes$

Pojem <u>podposloupnosti</u> (vybrané posloupnosti)

Posl. $(b_n)_{n\geq 1}$ je <u>podposloupnost</u> posloupnosti $(a_n)_{n\geq 1}$, když existuje
<u>vybraná z</u>

rostoucí zobrazení $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (tj. $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$) takové, že

$b_n = a_{f(n)}$ pro $\forall n$.

Příklady • $(4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots)$ je vybraná z $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots)$.

• $(a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, \dots)$ je podposloupnost posl. $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$; zde

$b_n = a_{2n}$, $f(n) = 2n$.

• Je to reflexivní a tranzitivní relace (na množině posloupností)

• Není antisymetrická: najděte příklad dvou posloupností $A \neq B$ takových, že A je podposloupnost B & B je podposloupnost A.

Pozn. Jinak řečeno $(b_n)_{n\geq 1}$ je podposl. posl. $(a_n)_{n\geq 1}$, když ex. posl. přir. čísel $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ taková, že $b_n = a_{k_n}$ pro $\forall n$.
$(f(n) = k_n)$

Tvrzení 2.3 (podposloupnost má stejnou limitu)

Když $(b_n)_{n\geq 1}$ je vybraná z $(a_n)_{n\geq 1}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, potom i

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

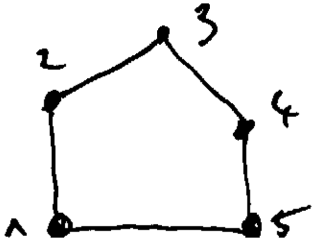
<u>D</u>. Nechť $b_n = a_{k_n}$, kde $1 \leq k_1 < k_2 < \dots$ je posl. přir. čísel. Všimněte si, že $k_n \geq n$ pro $\forall n$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Ex. n_0, že $n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$.

Tedy $n > n_0 \Rightarrow k_n \geq n > n_0$ a $|b_n - L| = |a_{k_n} - L| < \varepsilon$. $\boxtimes$

Řada vět a výsledků v matematice říká, že „úplný nepořádek je nemožný" — každá struktura z nějaké třídy má hezkou podstrukturu.

Známý příklad o večírku (party): Na $\forall$ večírku s alespoň 6 lidmi se najdou 3, kteří se vzájemně znají, nebo 3, kteří se vzájemně neznají.

Pro 5 lidí ne:

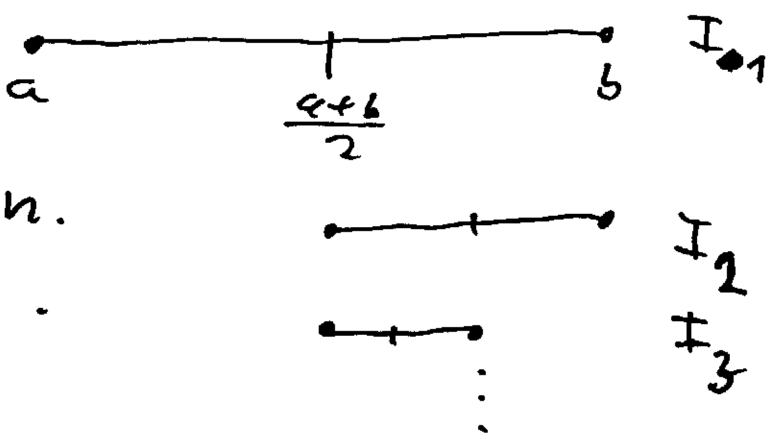


Obecně: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists R = R(n) \in \mathbb{N}$, že na $\forall$ večírku s $\geq R(n)$ lidmi se najde n lidí, že .....

$\boxed{\text{Věta 2.4}}$ (Bolzano–Weierstrass) Bernhard Bolzano (1781–1848)
Karl Weierstrass (1815–1897)

Každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost.

<u>Důkaz.</u> $(a_n)_{n\geq 1}$ omezená, takže $a \leq a_n \leq b$ pro $\forall n$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Položme $I_1 = [a,b]$ $(= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\})$.



I_2 = ta z polovin I_1, že $a_n \in I_2$ pro ∞ mnoho n.

I_3 = ta z polovin I_2, že $a_n \in I_3$ —— " —— .

atd.

Položme $b_1 = a_1$; $b_2 = a_{k_2}$, kde $k_2 > \underset{\overset{\|}{k_1}}{1}$ a $a_{k_2} \in I_2$; $b_3 = a_{k_3}$, kde $k_3 > k_2$ a $a_{k_3} \in I_3$; ... (rozmyslete si, proč v každém kroku takové $k_2, k_3, k_4, \ldots$ můžeme vzít). Pak $1 = k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$, $b_n = a_{k_n} \in I_n$.

Protože $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ a $|I_n| \to 0$, máme $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{L\}$ (Tvrzení 1.2).

Protože $\{b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots\} \subset I_m$, $n > m \Rightarrow |b_n - L| \leq \underbrace{|I_m|}_{= |I_1|/2^m}$. Tudíž $\lim b_n = L$. ☒