$\boxed{\text{Tvrzení 1.3.}}$ (hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)

$\forall a,b\in\mathbb{R},\ a<b\ \exists c\in\mathbb{Q}$, že $a<c<b$.

— " — $\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, — " —.

D. Plyne z Archimedovy vlastnosti $\mathbb{R}$. ~~Tabule~~... Cvičení $\boxtimes$

$\boxed{\text{Věta 1.4}}$ (Cantor) Neexistuje bijekce mezi množinami $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Říkáme, že $\mathbb{R}$ je nespočetná množina.

D. Ukážeme, že ~~každá~~ žádná posl. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)\subset\mathbb{R}$ nevyčerpá celé $\mathbb{R}$, tj. $\forall$ posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n\geq 1}$ $\exists \alpha\in\mathbb{R}$, že $a_n\neq\alpha$ pro $\forall n$.

Tabule ——. $\boxtimes$

Poznámka $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ jsou spočetné množiny. (cvičení)

(2) Posloupnosti a řady reálných čísel

Je-li každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazeno nějaké reálné číslo $a_n \in \mathbb{R}$, máme dánu <u>posloupnost (reálných čísel)</u> $(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n \geq 1}$.

<u>(reálná) posloupnost</u> je tedy zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$.

<u>Budeme zkoumat pojem limity reálné posloupnosti: $a_1, a_2, a_3, \dots \to L$.</u>

$\boxed{\text{Příklady}}$ $(1, 2, 3, 4, 5, \dots) = (a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = n$.

$(2, 4, 6, 8, 10, \dots) = (a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 2n$.

$(2, 4, 8, 16, 32, \dots) = (a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 2^n$.

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \dots\right) = (b_n)_{n \geq 1}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots) = (p_n)_{n \geq 1}$, p_n = n-té prvočíslo.

Zadání posloupnosti: • vzorcem, formulí, vlastností
• rekurentní, pomocí rekurence: $a_n = f(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$

$\boxed{\text{Příklady}}$ $(2, 4, 8, 16, \ldots) = (a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 2^n$

nebo (rekurentní definice) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n$ (pro $n \geq 1$).

$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots) = (F_n)_{n \geq 1}$, $F_1 = F_2 = 1$

(Fibonacciova čísla) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (pro $n \geq 1$)

bez rekurence: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Posloupnost $(a_n)_{n \geq 1}$ je <u>shora omezená</u>, když $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ má horní mez.
Podobně <u>zdola omezená</u>, <u>omezená</u>.

$(a_n)_{n \geq 1}$ je <u>neklesající</u> (= slabě rostoucí): $m \leq n \Rightarrow a_m \leq a_n$.
<u>nerostoucí</u> (= slabě klesající): $m \leq n \Rightarrow a_m \geq a_n$.

<u>(ostře) rostoucí</u>: $m < n \Rightarrow a_m < a_n$, <u>(ostře) klesající</u>: $m < n \Rightarrow a_m > a_n$.

$(a_n)_{n\geq 1}$ je <u>Cauchyovská</u>: $\forall \varepsilon>0\ \exists N:\ m,n>N \Rightarrow |a_m-a_n|<\varepsilon$.

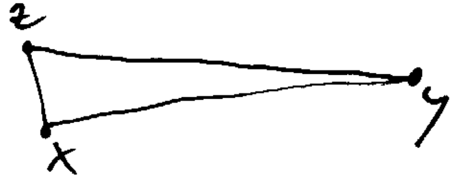
Definice Posloupnost $A=(a_n)_{n\geq 1}$ má <u>limitu</u> $L\in\mathbb{R}$, pokud platí:

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0:\ n>n_0 \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$.

Značení: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$; $a_n\to L$ pro $n\to\infty$. Někdy mluvíme podrobněji o <u>vlastní limitě</u> – o nevlastních limitách $+\infty, -\infty$ později.

A má limitu: A je <u>konvergentní</u>. A nemá limitu: <u>A je divergentní</u>

Poznámky • Vzdálenost na reálné ose: $d(x,y)=|x-y|$ má vlastnosti: $d(x,x)=0$, $d(x,y)=d(y,x)$ a (Δ-ová nerovnost) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.



• Konvergence (divergence) nezávisí na konečně mnoha členech posloupnosti.

• L není limitou posl. $(a_n)_{n\geq 1}$: $\exists \varepsilon>0\ \forall n_0\ \exists n:\ n>n_0\ \&\ |a_n-L|\geq\varepsilon$.

Příklady • $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. D. Pro $\varepsilon > 0$ vezmu $N \in \mathbb{N}$, že $\frac{1}{N} < \varepsilon$.
Pak $n > N$ dává $\underset{a_n}{\frac{1}{n}} < \frac{1}{N} < \varepsilon$, takže

$n > N \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$.

• $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = n$ je divergentní.

• taktež $((-1)^n)_{n\geq 1}$.

• $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. D. Sporem na tabuli. ⊠

Věta 2.1 (Jednoznačnost limity) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

D. L_1 a L_2 buďte dvě limity posloupnosti $(a_n)_{n\geq 1}$. Zvolme $\varepsilon > 0$,
$L_1 < L_2$

$\varepsilon < \frac{L_2 - L_1}{2}$. Pak ex. n_1, n_2, že $n > n_1 \Rightarrow |a_n - L_1| < \varepsilon$
$n > n_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < \varepsilon$. Takže
$n > \max(n_1, n_2) \Rightarrow |a_n - L_1| < \varepsilon \,\&\, |a_n - L_2| < \varepsilon$. To ale nejde ($\Delta$-ová n.) ⊠