Nástin důkazu Věty 1.1 (podrobně ho dělat nebudeme).

Konstrukce $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ z $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$:

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

Posloupnost zlomků $A = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, $a_n \in \mathbb{Q}$, je **cauchyovská**, pokud $\forall e \in \mathbb{Q}, e > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, že $m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < e$.

Dvě posl. zlomků $A = (a_1, a_2, \dots)$ a $B = (b_1, b_2, \dots)$ si jsou **blízké**, když $\forall e \in \mathbb{Q}, e > 0\ \exists n_0$, že $n > n_0 \Rightarrow |a_n - b_n| < e$.

Nechť $R :=$ množina všech cauchyovských posloupností zlomků

a

$$\mathbb{R} := R/\sim,$$ kde $\sim$ je relace (ekvivalence) blízkosti posloupností!

Tj. $\mathbb{R}$ se stává z „rodinek" vzájemně si blízkých c. posloupností zlomků. Pak $\mathbb{R}$ s přirozeně def. operacemi $+, \cdot$ a relací $<$ splňuje A1 – A14

$+$: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{R}$ buďte dvě rodinky. Vezmeme libovolné dvě posl. $A=(a_1,\dots)\in\mathcal{A}$ a $B=(b_1,\dots)\in\mathcal{B}$ a definujeme $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{C}$, kde $\mathcal{C}$ je rodinka obsahující posl. $C=(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots)$.

$\cdot$: podobně.

$<$: $\mathcal{A}>\mathcal{B} \iff \exists\, \overset{\mathbb{Q}\,\downarrow}{e}>0$, že $a_n-b_n>e$ pro $\forall n>n_0$.

Nutno ověřit: výsledky nezávisí na reprezentantech rodinek, platí A1–A14.

Cvičení Jak byste pro $\mathcal{A}\neq 0$ definovali $\mathcal{A}^{-1}=\frac{1}{\mathcal{A}}$? (Jak se v $\mathbb{R}$ dělí?)

$\mathbb{Q}$ „$\subset$" $\mathbb{R}$: $\ell\in\mathbb{Q}$, $L:=(\ell,\ell,\ell,\dots)$, $\mathcal{L}:=$ rodinka obs. L

$\tilde{\mathbb{Q}}=\{\mathcal{L}:\ell\in\mathbb{Q}\}$, pak $\tilde{\mathbb{Q}}\subset\mathbb{R}$ a $(\tilde{\mathbb{Q}},+,\cdot,<)\cong(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$.

← Cantorova konstrukce $\mathbb{R}$ Georg Cantor (1845–1918)

Důkaz, že $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ splňuje axiom suprema A14. (TO je přece pointa celého příběhu!)

Pro $\mathcal{A}\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{Q}$ značením $\underline{\mathcal{A}<b}$ rozumíme, že $\mathcal{A}<\mathcal{B}$, kde $\mathcal{B}$ je rodinka posloupnosti $(b,b,b,\dots)$. Archimedes (-287 – -212)

a) $\forall \mathcal{A}\in\mathbb{R}\ \exists q\in\overset{\mathbb{N}}{\cancel{\mathbb{Z}}}$, že $\mathcal{A}<q$ – Archimedova vlastnost

b) $X\subset\mathbb{R}$ buď $\neq\emptyset$ a shora omezená. Podle a) ex. $p,q\in\mathbb{Z}$, $p<q$, že p není horní mez X, ale q je. Nechť $\Delta:=q-p$.

c) $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists!\, k_n\in\mathbb{N}_0$, že $p+\frac{k_n}{n}\Delta$ není h. mez X, ale $p+\frac{k_n+1}{n}\Delta$ je; patrně $0\leq k_n\leq n$. Položme $p_n=p+\frac{k_n}{n}\Delta$, $q_n=p+\frac{k_n+1}{n}\Delta$,

$P=(p_1,p_2,\dots)$ a $Q=(q_1,q_2,\dots)$.

d) P a Q jsou cauch. posloupnosti, jsou si blízké, a jejich rodinka $\mathcal{R}$ je supremum X, $\sup(X)=\mathcal{R}$. $\boxtimes$

Též nutno dokázat jednoznačnost $\mathbb{R}$ až na izomorfismus usp. těles – ne-
budeme dělat. ⊠ ⊠

Vlastnosti $\mathbb{R}$

Důsledky axiomu suprema

- Archimedova vlastnost ($\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < n$) je důsledkem a. suprema. D. cvičení.
- Každá $\neq \emptyset$, zdola omezená množina $X \subset \mathbb{R}$ má infimum.
  D. $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, X zdola omezená. Pak $\inf(X) = -\sup(-X)$.
- Existence n-té odmocniny: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0\ \underbrace{\exists!}_{\text{ex. právě jedno}}\ \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$, že $\beta^n = \alpha$. $\beta := \sqrt[n]{\alpha}$
- Každá $\neq \emptyset$ a shora omezená množina $X \subset \mathbb{Z}$ má maximum.
  D. cvičení.

Jinak řečeno, pro každé $n \in \mathbb{N}$ a ~~každ~~ reálné $\alpha > 0$ má rovnice $x^n = \alpha$ jednoznačné řešení v kladných reálných číslech. ⊠

D. Stačí pro $n = 2$, tabule.

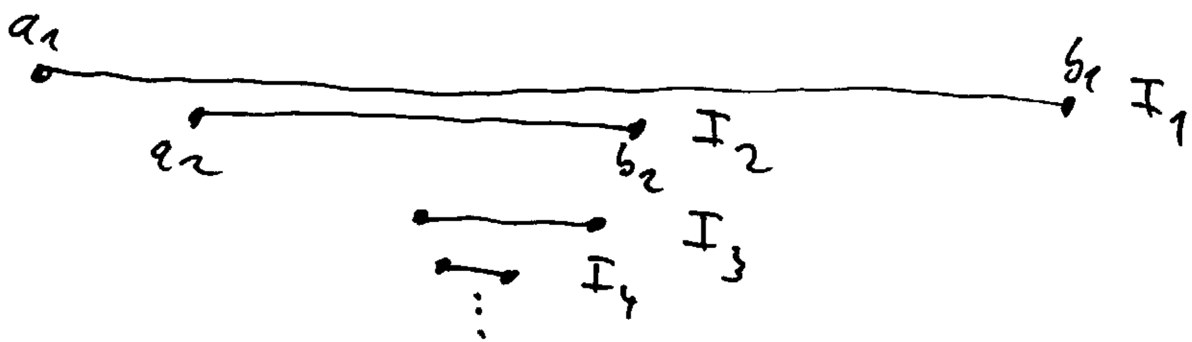
• $\boxed{\text{Tvrzení 1.2}}$ (Vlastnost vnořených intervalů; Cantor)

$a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n \le b_n$, $n = 1, 2, \dots$, interval $I_n = [a_n, b_n]$
$= \{x \in \mathbb{R} : a_n \le x \le b_n\}$.

Pokud $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, potom $\exists c \in \mathbb{R}$, že $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Když navíc $\underbrace{|I_n|}_{\text{délka intervalu } I_n} \to 0$ (tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon$), pak

dokonce $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$.



D. $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots \quad \dots \le b_3 \le b_2 \le b_1$, $c := \sup\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Takže $a_n \le c \le b_n$ pro $\forall n$, což jsme chtěli dokázat. Když $c, d \in \mathbb{R}$, $c \ne d$, obě leží v $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \dots$, pak zřejmě $|I_n| \ge |c-d|$ pro $\forall n$. ⊠