Integrace racionálních funkcí

racionální funkce $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty.

$f : \mathbb{R} \setminus K \to \mathbb{R}$, kde $K = \{\alpha \in \mathbb{R} : Q(\alpha) = 0\}$ ... reálné kořeny polynomu Q.

Př. $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$; $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)^2}{x-1} = x - 1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} : I \to \mathbb{R}$, kde $I = (a, b)$, podle V. 5.2 má $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ na I prim. funkci. Dá se tato prim. funkce napsat vzorečkem?

Odpověď: ANO, ale za předpokladu, že dokážeme nalézt kořeny (reálné i komplexní) polynomu $Q(x)$.

Věta 5.6 (obecný tvar funkce primitivní k racionální funkci)

$I=(a,b)$, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}: I \to \mathbb{R}$ buď rac. funkce.

Funkce f má na I primitivní funkci F ~~tvaru~~, která se dá vyjádřit pomocí rac. funkce, logaritmů a arcus tangent.

Podrobněji:

$$F(x) = r(x) + \sum_{i=1}^{k} a_i \log(p_i(x)) + \sum_{i=1}^{l} b_i \arctan(q_i(x)),$$

kde $r(x)$ je rac. funkce, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, p_i a q_i jsou polynomy s $\deg(p_i) \le 2$, $\deg(q_i) = 1$.

Popíšeme algoritmus pro nalezení F v tomto tvaru. Budeme si ale muset připomenout vlastnosti polynomů.

$\boxed{\text{Věta}}$ (základní věta algebry)

$n \geq 1$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, libovolný polynom.

Pak existuje $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $P(\alpha) = 0$. Tj. každý nekonstantní komplexní polynom má kořen.

D (Gauss, $\doteq 1800$) nebudeme dělat. $\boxtimes$

$\boxed{\text{Důsledek}}$ Pro P jako výše existují až na pořadí jednoznačně určená (ne nutně různá) čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ taková, že

$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$

D. ~~~ tabule. $\boxtimes$

$\boxed{\text{Důsledek}}$ $P(x) = a_n (x - \beta_1)^{k_1} (x - \beta_2)^{k_2} \cdots (x - \beta_r)^{k_r}$, kde $\beta_i \in \mathbb{C}$ jsou vzájemně různá čísla, $k_i \in \mathbb{N}$ a $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

D. ~~~ $\boxtimes$

α_i, β_i ... kořeny polynomu P, k_i ... násobnosti kořenů.

Takže kořeny polynomu P = nulové body polynomu P. $(x-\alpha_i), (x-\beta_i)$ – kořenové činitele

$\boxed{\text{Důsledek}}$ Každý polynom P, který není identicky nulový, má nejvýše $\deg(P)$ nulových bodů.

$\boxed{\text{Důsledek}}$ Nechť $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$
$Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$, $b_i \in \mathbb{C}$, $b_m \neq 0$ jsou dva

komplexní polynomy a existuje k různých čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, že $k > \max(m,n)$ a $P(\alpha_1) = Q(\alpha_1), \dots, P(\alpha_k) = Q(\alpha_k)$. Potom $P(\alpha) = Q(\alpha)$ pro $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ a $m = n$, $a_m = b_m, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$.

D. ~~~~~~ tabule

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Je-li α kořenem polynomu $P(x)$ s násobností $k \geq 1$, potom je α kořenem $P'(x)$ s násobností $k-1$.

D. ~~~ tabule. ☒

$\boxed{\text{Důsledek}}$ Násobnost α v $P(x)$ = min. k takové, že $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Polynomy s reálnými koeficienty

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Je-li $\alpha = a+bi \in \mathbb{C}$ kořenem reálného polynomu $P(x)$ s násobností k, pak i $\bar{\alpha} = a-bi$ je kořenem $P(x)$ s násobností k.

D. ~~~ tabule ~~~. ☒

$\boxed{\text{Důsledek}}$ $\forall$ reálný polynom $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, má až na pořadí faktorů jednoznačný rozklad

$P(x) = a_n (x-\alpha_1)^{k_1} \dots (x-\alpha_r)^{k_r} (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{\ell_1} \dots (x^2+\beta_s x+\gamma_s)^{\ell_s}$, kde $k_i, \ell_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, žádné dva z polynomů $x-\alpha_i$, $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ nemají společný kořen a kv. polynomy $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ nemají reálný kořen.

D. ~ tabule ~

$\boxed{\text{Tvrzení 5.7}}$ P, Q buďte reálné polynomy, $\deg(P) < \deg(Q)$,
(rozklad na parciální zlomky)

$$Q(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_r)^{k_r} (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1} \cdots (x^2+\beta_s x+\gamma_s)^{l_s}$$

buď rozklad jako výše. Pak

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{b_{i,j} x + c_{i,j}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^j}$$

parciální zlomky

pro jednoznačně určená reálná čísla $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j} \in \mathbb{R}$

D. nebudeme dělat. $\boxtimes$

Integrace rac. funkce $\frac{P(x)}{Q(x)} : (a,b) \to \mathbb{R}$, kde P, Q jsou reálné polynomy.

<u>1. krok</u> Dělení se zbytkem: $P = QP_1 + P_2$, $\deg(P_2) < \deg(Q)$.

Takže $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \underbrace{\int P_1(x)\,dx}_{\text{triv}} + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}\,dx, \quad \deg(P_2) < \deg(Q).$$

<u>2. krok</u> Rozklad na parciální zlomky: Podle Tvrz. 5.7,

$$\int \frac{P_2(x)}{Q(x)}\,dx \overset{c}{=} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \int \frac{a_{i,j}\,dx}{(x-d_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} \int \frac{b_{i,j}x + c_{i,j}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^j}\,dx$$

($Q = \dots$ je rozložen jako v Tvrz. 5.7).

<u>3. krok</u> Nalezení prim. funkcí na PS rovnosti, tj. integrace parc. zlomků.

a) $$\int \frac{a}{(x-d)^n} \overset{c}{=} \begin{cases} \dfrac{a}{1-n}\dfrac{1}{(x-d)^{n-1}} & \dots\ n>1 \\ a\cdot \log|x-d| & \dots\ n=1 \end{cases} \quad \text{na } (-\infty,d),\ (d,+\infty)$$

$0 \neq a, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

b) $I=\int \frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^q}\,dx$, $q\in\mathbb{N}$, $x^2+\beta x+\gamma$ nemá reálný kořen

$\iff \gamma-\beta^2/4>0$

$b,c,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$; $b\neq 0 \vee c\neq 0$.

$$I = \underbrace{\frac{b}{2}\int \frac{2x+\beta}{(-''-)^q}\,dx}_{I_1} + \left(c-\frac{b\beta}{2}\right)\underbrace{\int\frac{dx}{(-''-)^q}}_{I_2}$$

$$I_1 \overset{c}{=} \begin{cases} -\dfrac{1}{(1-q)(x^2+\beta x+\gamma)^{q-1}} & \ldots\ q>1 \\ \log(x^2+\beta x+\gamma) & \ldots\ q=1 \end{cases}$$

(na $\mathbb{R}$)

substituce $y=x^2+\beta x+\gamma$, $\frac{dy}{dx}=2x+\beta$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^q} = \int \frac{dx}{\left((x+\beta/2)^2 + \underbrace{\gamma - \beta^2/4}_{\varrho>0}\right)^q} = \frac{1}{\varrho^q} \underbrace{\int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x+\beta/2}{\sqrt{\varrho}}\right)^2+1\right)^q}}_{I_3}$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x+\beta/2}{\sqrt{\varrho}}\right)^2+1\right)^q} = \sqrt{\varrho} \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+1)^q}}_{T_q}$$

, substituce $t = \frac{x+\beta/2}{\sqrt{\varrho}}$.

Jak víme (viz příklad po větě o per partes), $T_1 = \arctan t$,

$$T_{n+1} = \frac{t}{2n(1+t^2)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) T_n .$$

$\Downarrow$ $T_n(t) = \underbrace{r(t)}_{\text{rac. funkce}} + \underbrace{c}_{\in \mathbb{R}} \cdot \arctan t$

Tím je Věta 5.6 dokázána.

~~Poznámka~~ ~~Pro zjednodušení~~

Příklad

$$I = \int \frac{1+x^2}{(1+x)(x^2+x+1)}\,dx = \dots \text{ tabule.}$$