Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce
2. Zjistíme průsečíky se souřadnicovými osami
3. Zjistíme symetrii funkce: sudost, lichost, periodicita
4. Dopočítáme limity v krajních bodech def. oboru
5. Spočteme 1. derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy.
6. Spočteme 2. derivaci a určíme intervaly, kde je f konvexní či konkávní. Určíme inflexní body.
7. Nalezneme asymptoty funkce
8. Načrtneme graf funkce

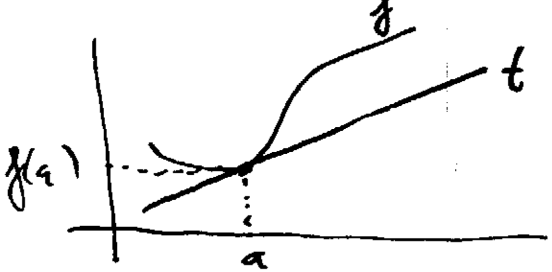
Příklad: $f(x) = \begin{cases} \exp(-1/\sin^2 x) & \dots x \in \mathbb{R}, \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \dots x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

~~~ tabule ~~~.
~~~

Taylorův polynom

$a \in \mathbb{R}$, $f'(a) \in \mathbb{R}$, rovnice tečny ke grafu f v bodě a (tj. v bodě $(a, f(a))$)

$$t(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a)$$



$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - t(x)}{x-a} = 0.$$

Obecněji: pro $n \in \mathbb{N}$ hledáme polynom $p(x)$ stupně $\leq n$, že

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

<u>Definice</u> $a \in \mathbb{R}$, ex. $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$.

Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a:

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}(x-a)^i f^{(i)}(a) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

$(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$. Takže $f(a) = T(a)$, $f'(a) = T'(a)$, $\dots$, $f^{(n)}(a) = T^{(n)}(a)$.

$\boxed{\text{Lemma}}$ Q polynom stupně $\leq n$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Potom $Q \equiv 0$.

D. tabule ~~~~~~~~~~~~ .

$\boxed{\text{Věta 4.17}}$ (Charakterizace Taylorova polynomu)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[x]$ stupně $\leq n$. Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0 \iff P = T_n^{f,a}.$$

D. $\Leftarrow$ pro $n=1$ platí, $T_1^{f,a} = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-T_1^{f,a}(x)}{x-a} = 0$.

Nechť $n>1$. Podle l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-(T_n^{f,a}(x))'}{n(x-a)^{n-1}} = \frac{1}{n}\lim_{x\to a} \frac{f'(x)-T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} =$$

$= 0$ ind. předpoklad.

$\Rightarrow$. Nechť $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Máme ~~$\lim_{x\to a} p(x) - T(x)$~~ $\lim_{x\to a} \frac{P(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{P(x)-f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}$

$= \underbrace{0}_{\text{podle předp.}} + \underbrace{0}_{\text{podle implikace } \Leftarrow} = 0$. Podle lemmatu $P(x) = T_n^{f,a}(x)$.

$\boxtimes$

$\boxed{\text{Věta 4.18}}$ $f : (a,x) \to \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}$ je vlastní na (a,x), $\varphi : [a,x] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,x]$, φ' vlastní na (a,x). Pak ex. $c \in (a,x)$, že

$a \neq 0$

$$\underbrace{f(x) - T_n^{f,a}(x)}_{R_n^{f,a}(x)} = \frac{1}{n!}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(c)}\,f^{(n+1)}(c)\,(x-c)^{n+1}.$$

D. Tabule ~~~~~ .

$\boxed{\text{Důsledky}}$ • (Lagrangeův tvar zbytku) Za předp. V. 4.18. ex. $c \in (a,x)$, že

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(c)\cdot(x-a)^n.$$

• (Cauchyův tvar zbytku) Za předp. V. 4.18 ex. $c \in (a,x)$, že

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)\,(x-c)^n\,(x-a)$$

D. Polož $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, resp. $\varphi(t) = t$. Tabule ~~~~. ☒ ☒