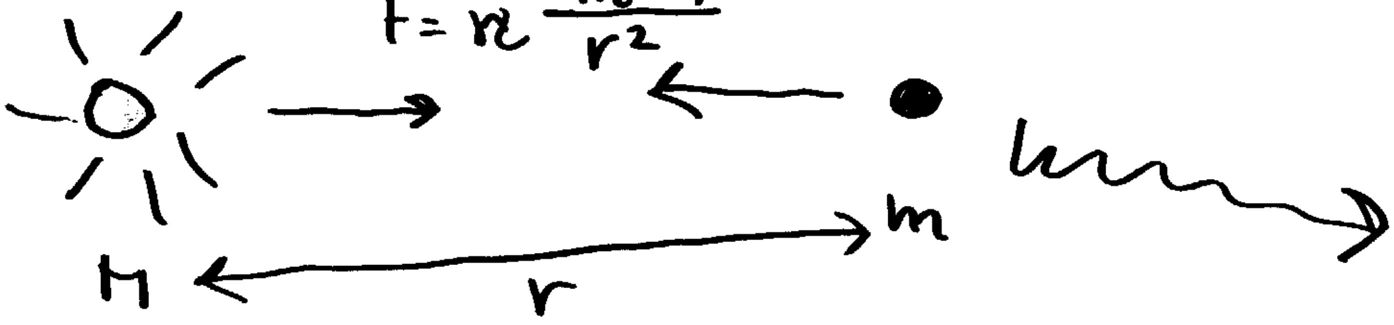
(0) Úvod

Co je matematická analýza, proč dělat analýzu.

• Modelování světa kolem nás: Isaac Newton (1643–1727)

$$F = \kappa \frac{m M}{r^2}$$



matematické modely: reálná čísla, (reálné) funkce jedné i více proměnných, derivace (rychlost, zrychlení), integrály (plocha, objem, moment setrvačnosti, ...), ...

MATEMATICKÁ ANALÝZA I (MAI 054)

Přednášející: Doc. RNDr. Martin Klazar Dr.

Kontakt: pracovna 224, 221914238, klazar@kam.mff.cuni.cz

Konzultace: v pondělí po přednášce do 18:30.

Cvičení: zápočet nutný pro zkoušku; podle požadavků cvičících

cvičící: RNDr. Naděžda Krylová, CSc. a RNDr. Markéta Lopatková, Ph.D.

zápočtová písemka: pro zápočet, započítává se ke zkoušce

Zkouška: písemná; nerozhodné případy na ústní dozkoušení

písemka: 90 min, většinou teorie.

Výsledná známka: zkoušková písemka (cca 60%) + zápočtová písemka (cca 40%)

podrobněji během semestru

Co nás čeká v ZS

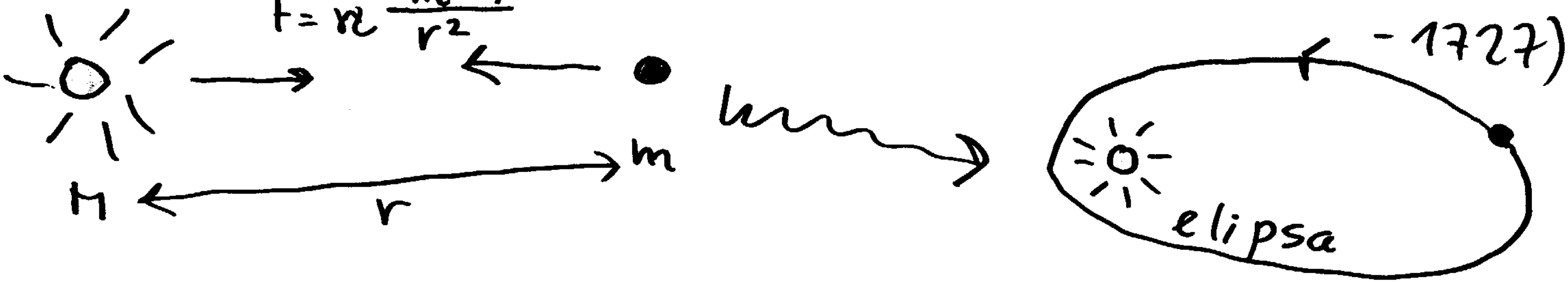
0. Úvod (opakování)
1. Reálná čísla a jejich vlastnosti.
2. Posloupnosti a řady (r. čísel)
3. Limity a spojitost reálných funkcí.
4. Derivace reálných funkcí.
5. Primitivní funkce (tj. antiderivování).

0 Úvod

Co je matematická analýza, proč dělat analýzu.

- Modelování světa kolem nás: Isaac Newton (1643 - - 1727)

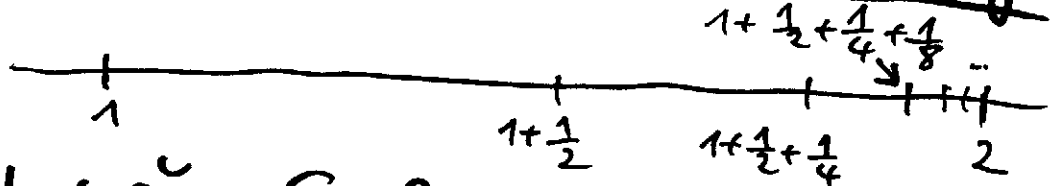
$$F = \varkappa \frac{m M}{r^2}$$



matematické modely: reálná čísla, (reálné) funkce jedné i více proměnných, derivace (rychlost, zrychlení), integrály (plocha, objem, moment setrvačnosti, ...), ...

• <u>zvládání a zkoumání nekonečna, nekonečných struktur a dějů</u>

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = ?$$



$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2 + S, \text{ takže } S = 2.$$

Ale co $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots = ?$

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = S - 1, \text{ takže } S = -1 \ ???$$

$$\begin{array}{l}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{array}{l}\Sigma = 6 \\ \Sigma = 15 \\ \Sigma = 24\end{array} \\ \begin{array}{ccc}\Sigma = 12 & \Sigma = 15 & \Sigma = 18\end{array}\end{array}$$

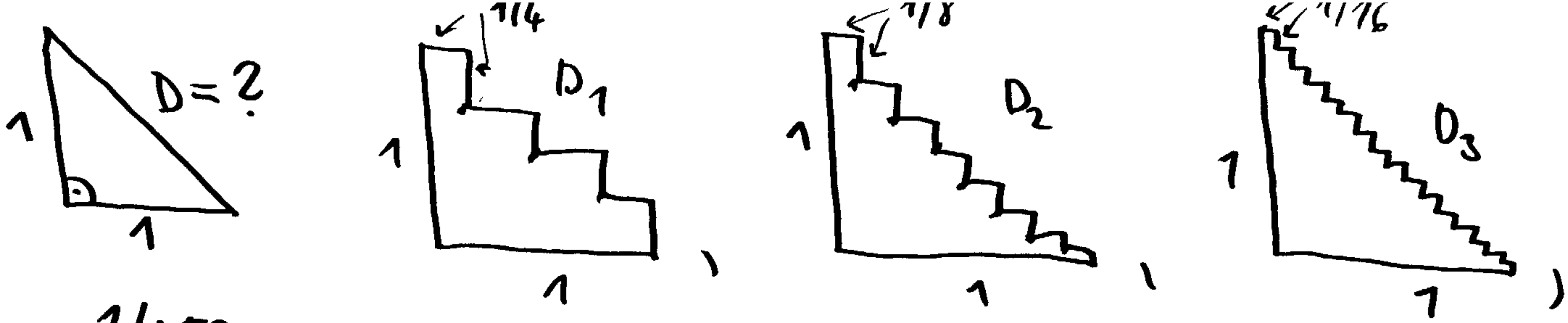
a celková suma $45 = 6 + 15 + 24 = 12 + 15 + 18$.

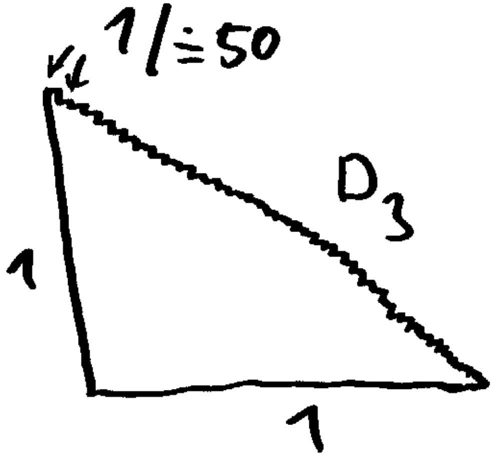
Ale co nekonečná matice

$$\begin{array}{cccccc}
\Sigma=0 \; + & \Sigma=0 \; + & \Sigma=0 \; + & \Sigma=0 \; + & \Sigma=0 \; \dots & = \underline{0} \\
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \ddots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\Sigma = 1 \\ \Sigma = 0 \; + \\ \Sigma = 0 \; + \\ \Sigma = 0 \; + \\ \Sigma = 0 \; + \\ \Sigma = 0 \; + \\ \vdots \; +
\end{array}
\Bigg\} \text{ celkem } \underline{1}$$

???





, ...

ale vždy $D_1 = 2,\ D_2 = 2,\ D_3 = 2,\ \dots \to 2$

Takže i $D = 2$.

Ale, jak dobře víme, $D = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. ???

• <u>Matem. analýza v informatice</u> diskrétní × spojité

Diskrétní (tj. přetržité, nespojité) modely a struktury informatiky se zkoumají často pomocí metod a modelů z analýzy. Je to často nejúčinnější postup.

Opakování (značení, pojmy, důkazy)

- **Logika** výrok – tvrzení, o němž má smysl říci, zda je pravdivé nebo nepravdivé

Vídeň je hlavní město ČR – výrok

Kéž by už byl konec! Ahoj! – nejsou výroky.

logické spojky & (a/zároveň), ∨ (nebo), $\Rightarrow$ (implikace), $\Leftrightarrow$ (ekvivalence), ¬ (negace); pravdiv. tabulky: ______.

$A \Rightarrow B$, A je postačující podmínka pro B, B je nutná podmínka pro A platí

Kvantifikátory: $\forall$ („pro všechny"), $\exists$ („existuje")

Predikáty (výrokové funkce) Např. pred. sudosti $S(x)$ pro $x \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

Tvrzení (sentence). $\forall x, y \in \mathbb{N}: S(x) \& S(y) \Rightarrow S(x+y)$. (pravdivé)
Součet každých 2 sudých přir. čísel je sudý. x, y sudá čísla $\Rightarrow x+y$ též sudé.

Predikáty s více proměnnými, např. binární se dvěma.
Např. $<$ („menší než") na množině celých čísel $\mathbb{Z}$ je binární predikát. $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\forall x \exists y : x < y$ | $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} (x < y)$ | Ke každému (celému) číslu existuje ~~menší~~ větší

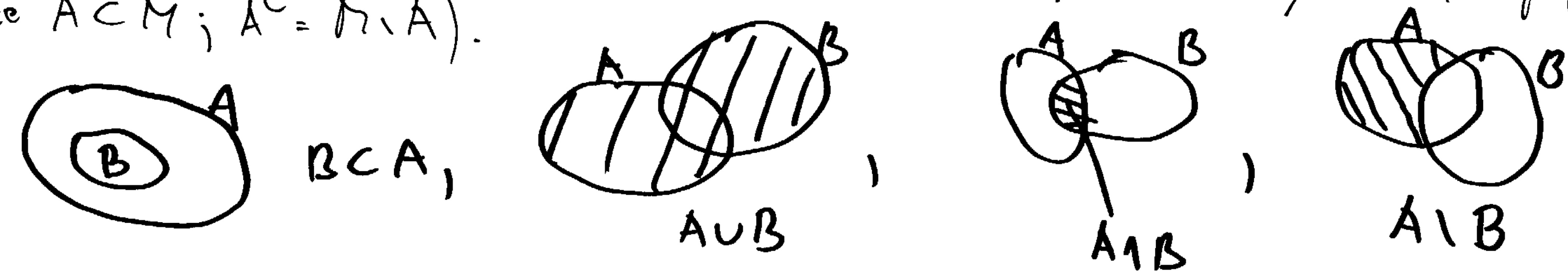
– pravdivé tvrzení

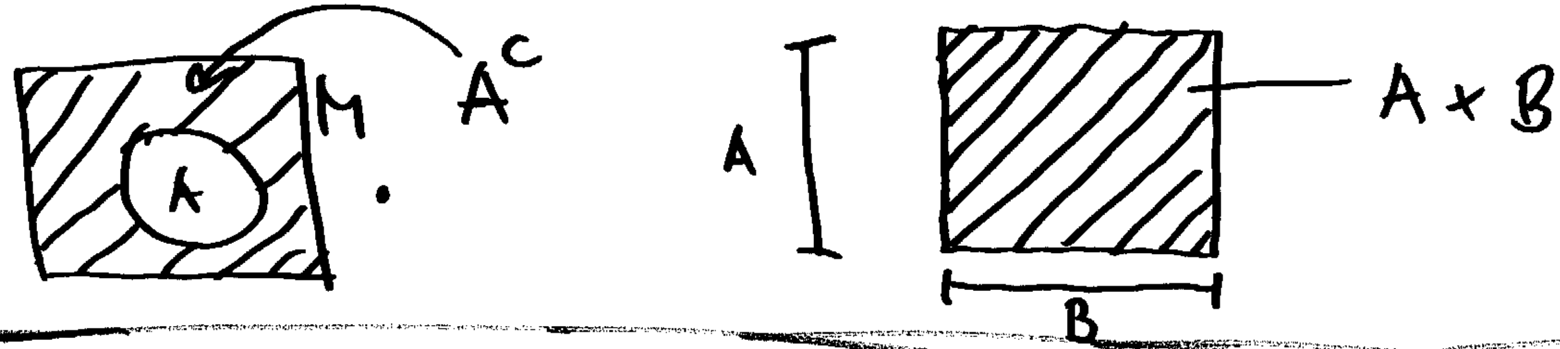
Ale $\exists y \forall x : x < y$ | $\exists y \forall x : (x = y \vee x < y)$ – nepravdivá tvrzení.

• Množiny zadání množiny výčtem : $X = \{a, *, -5, 7\}$, $* \in X$
— " — vlastností : $Y = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ je sudé}\}$ | $0 \notin X$

Množinové značení $\in$ … být prvkem, $\subset$ … být podmnožinou, $\cup$ … sjednocení dvou množin, $\cap$ … průnik dvou množin, $\emptyset$ … prázdná množina,

$A\setminus B$ ... rozdíl dvou množin, A^c ... doplněk množiny do množiny M (předp., že $A\subset M$; $A^c = M\setminus A$).





<u>Kartézský součin 2 množin</u> $A\times B=\{(a,b): a\in A,\ b\in B\}$ (množina usp. dvojic (prvek z A, prvek z B))

<u>binární relace na množině A</u> je $R\subset A\times A$. Např. $\leq$ na množině přir. čísel $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$. ($R\subset A\times B$ – mezi množinami A a B)

syntakticky: ~~...~~ $4\leq 2$ = NE, $10\leq 100$ = ANO, ...

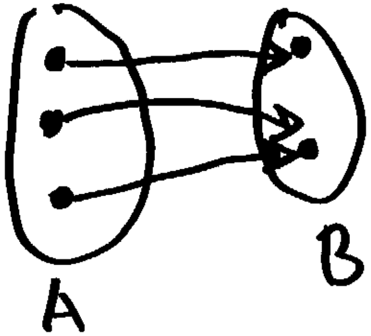
sémanticky: $\leq\ = \{(1,1),(1,2),(2,2),(1,3),(2,3),(3,3),(1,4),\dots\}$.

zobrazení, funkce z množ. X do množ. Y je $\underbrace{F \subset X \times Y}_{\text{relace}}$ taková, že píšeme $F: X \to Y$

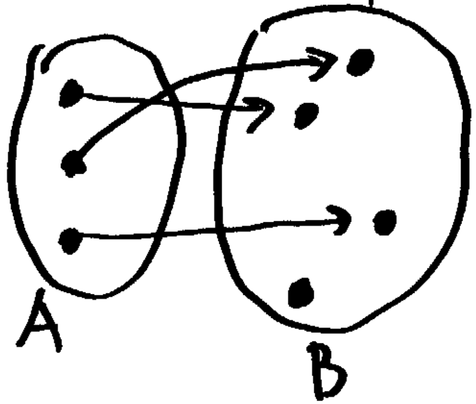
$\forall a \in X$ $\exists$ právě jedno $b \in Y$, že $(a,b) \in F$.

Píšeme $b = F(a)$, b je funkční hodnota F na argumentu a.

Bijektivní zobrazení, bijekce, vzájemně jednoznačné zobrazení je zobr. $F: X \to Y$ taková, že $\forall b \in Y$ $\exists$ právě jedno $a \in X$, že $F(a) = b$



,



,

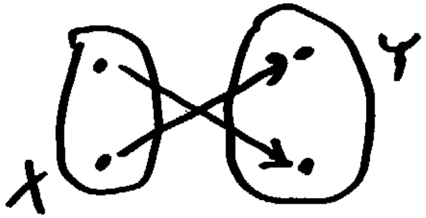
$F: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$F(n) = n+1$

Nejsou bijekce

$F: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

$F(n) = n+1$



– Jsou bijekce

posloupnost prvků z množiny A je funkce $F: \mathbb{N} \to A$. Píšeme:

$F_1 := F(1)$, $F_2 := F(2)$, … ; celkem $(F_1, F_2, F_3, \dots)$.

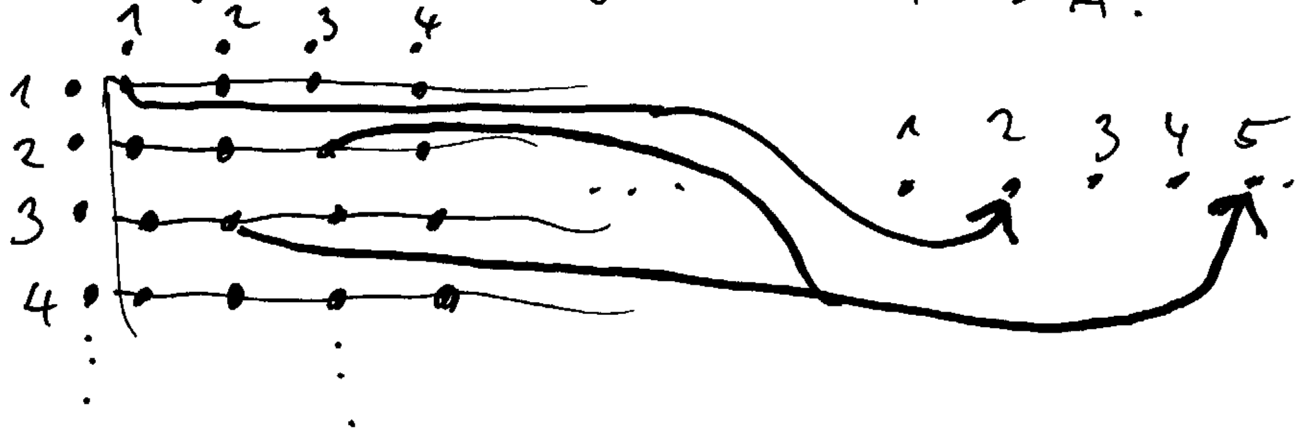
Např. $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, $a_1 = a_2 = 1$

$A = \mathbb{N}$ $\qquad = (a_n)_{n \geq 1}$ $\qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Fibonacciova čísla

binární operace na množině A je zobrazení $F: A \times A \to A$.

Např. $+$ na množině $\mathbb{N}$,



$2 + 3 = 5$

$3 + 2 = 5$

$1 + 1 = 2$

$\vdots$

Nebo (na množině $\mathbb{N}$) x^y, $NSD(x, y)$, …

• Číselné množiny

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ jsou přirozená čísla; $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

(množináři: $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, kde $0 = \emptyset$, $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ atd.)

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ jsou celá čísla.

$\mathbb{Q}$ „$=$" $\left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ jsou racionální čísla (zlomky).

přesněji: $\mathbb{Q} = \{\underbrace{(a, b)}_{\frac{a}{b}} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} / \underset{\text{ekvivalence}}{\sim}$, kde $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

$\mathbb{Q}$ = „rodinky" vzájemně ekvivalentních zlomků.

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{200}{300} = \frac{-34}{-51} = \dots$ | základní tvar zlomku: ...