<u>Typická úloha</u> $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá a má na (a,b) derivaci.

$-\infty < a \leq b < +\infty$

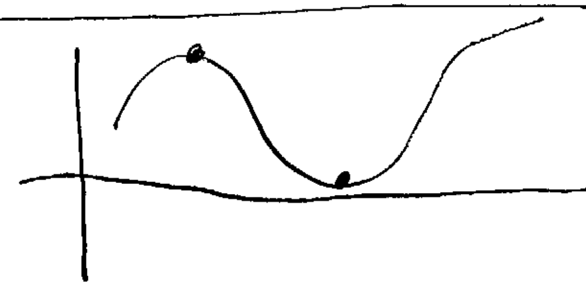
Nalezněte globální extrémy f na $[a,b]$.

<u>Postup</u> 1. Víme, že f na $[a,b]$ nabývá maxima i minima (V)

2. Extrém může být jen bodem množiny

$\{x \in (a,b) : f'(x) = 0\} \cup \{a,b\}$.

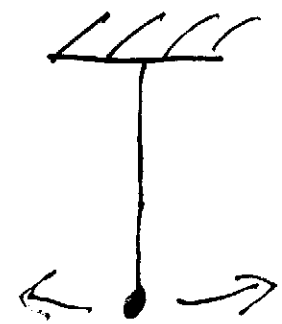
Význam derivací: • Extrémy funkcí



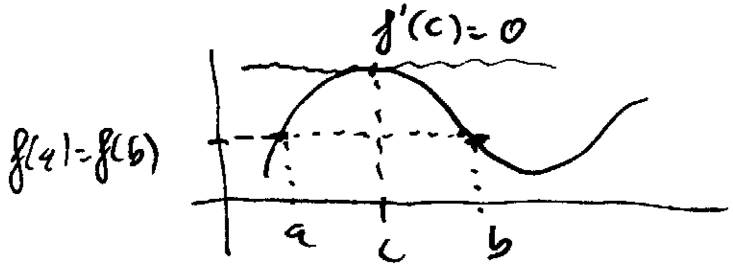
• diferenciální rovnice
(popis fyzikálních jevů)

$F = ma = m\,\ddot{x}(t)$

druhá derivace polohy



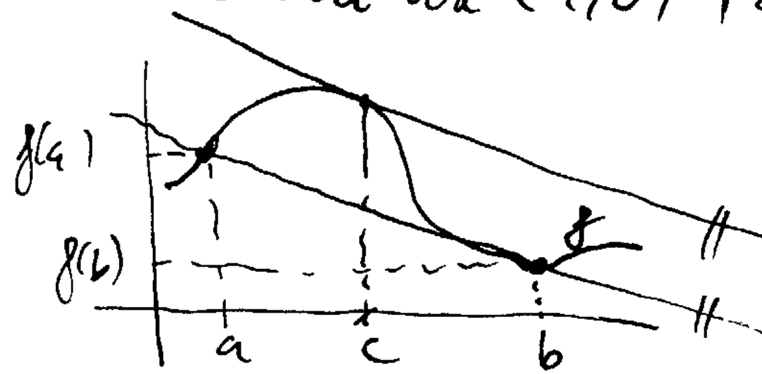
$\boxed{\text{Věta 4.6}}$ (Rolleova věta) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ spojitá a má $\exists$ na ~~intervalu~~ intervalu (a,b) derivaci, $f(a)=f(b)$. Pak $\exists\, c\in(a,b)$, že $f'(c)=0$.



D. , tabule. $\boxtimes$

$\boxed{\text{Věta 4.7}}$ (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ spojitá (na $[a,b]$) a má derivaci na (a,b). Pak $\exists\, c\in(a,b)$, že $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



D. . $\boxtimes$

$\exists$ tečna rovnoběžná se sečnou.

Ještě obecněji:

Věta 4.8 (Cauchyova věta o střední hodnotě)

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ spojité na $[a,b]$, obě mají na (a,b) derivaci, g má na (a,b) vlastní derivaci $\neq 0$. Potom

$\exists\, c\in(a,b)$, že
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

D. tabule $\boxtimes$

Několik aplikací vět o střední hodnotě

Věta 4.9 (l'Hospitalovo pravidlo) $a\in\mathbb{R}^*$, $f,g: U(a,\delta)\to\mathbb{R}$, obě funkce mají na $U(a,\delta)$ vlastní derivace a $g'(x)\neq 0$ pro $\forall x\in P(a,\delta)$. Pak

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.
2. $\lim\limits_{x\to a} |g(x)|=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

D. $\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim$. $\boxtimes$

Příklady na (ne)použití l'Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{3x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ldots)'}{(\ldots)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} = 2/3 \ ?$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x+\sin x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\ldots)'}{(\ldots)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{1+\cos x} \text{ neexistuje ?}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ldots)'}{(\ldots)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} \text{ a co dál ?}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \ldots$$

Tvrzení 4.10 f spojitá zprava v $a\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom $f'_+(a) = A$.

D. $\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim$ $\boxtimes$