Věta 4.4 (derivace inverzní funkce)

$J\subset\mathbb{R}$ buď interval, $a\in J$ vnitřní bod, $f: J\to\mathbb{R}$ spojitá a ryze monotónní na J, $f(a)=b$. Potom:

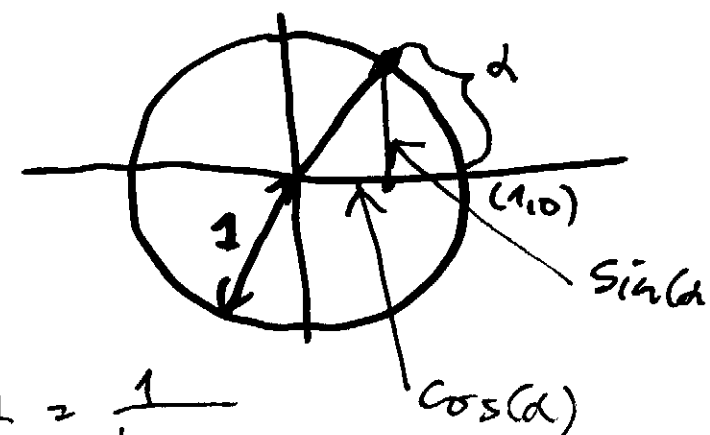
1. $f'(a)\in\mathbb{R}^*\setminus\{0\} \Rightarrow \boxed{(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}}$

2. $f'(a)=0$, f je rost. (kles.) $\Longrightarrow (f^{-1})'(b)=+\infty \quad (-\infty)$.

D. tabule $\boxtimes$

Připomenutí goniometrických a také cyklometrických funkcí

$0\le\alpha\le 2\pi$



$\sin(x)$, $\cos(x)$, ~~tg~~ $\tan(x)$, $\cot(x)$.

$$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cot(x)=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

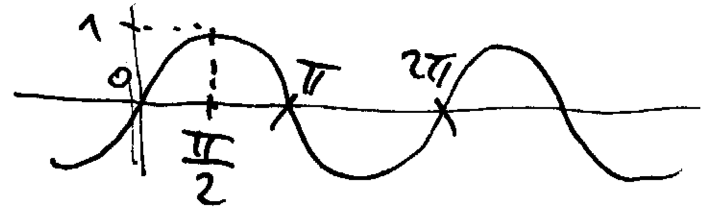
Věta (bez čísla)

Ex. právě jedno kladné číslo $\pi\in\mathbb{R}$ a právě jedna funkce $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, že (i) $\sin(0)=0$,

(ii) $\forall x,y: \sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin(x)\sin(\frac{\pi}{2}-y)$,

(iii) $\sin(x)$ je rostoucí v $[0, \frac{\pi}{2}]$, (iv) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
(tj. $\sin'(0)=1$)

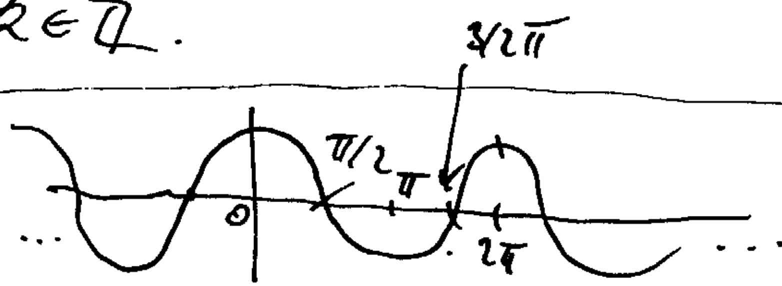
D. Nebudeme dělat.



Základní vlastnosti sinu

- $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
- $\sin(x)$ je lichá funkce
- $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin(\frac{\pi}{2}+y) = \sin(\frac{\pi}{2}-y)$ pro $\forall y \in \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}: \sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}: |\sin(x)| \leq 1$ & (dokonce $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$)
- funkce $\sin(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$
- $\sin(x) = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\cos(x) := \sin(\frac{\pi}{2}+x),\ x \in \mathbb{R}$
(cosinus)

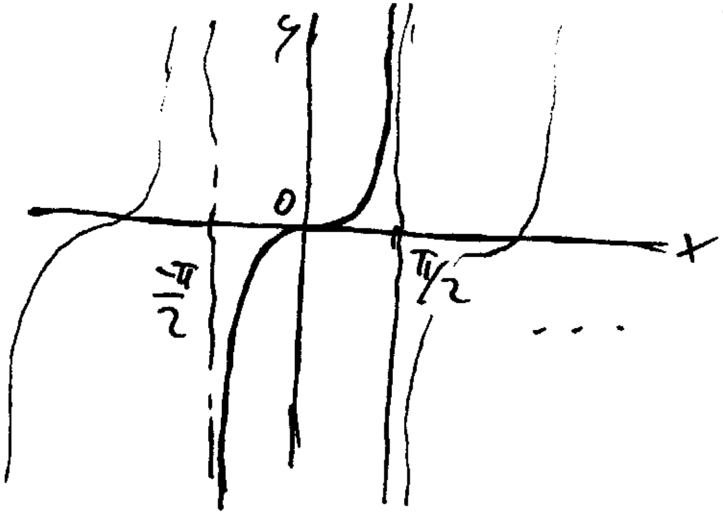


(posunutý sinus)

$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\cot(x) := \frac{1}{\tan(x)}$

$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ | $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

tan:

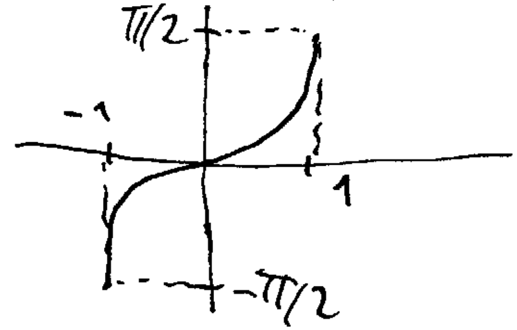
...  ...

- Funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Cyklometrické funkce (inverzní ke goniometrickým)

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ je rostoucí a spojitá fce (je to bijekce)

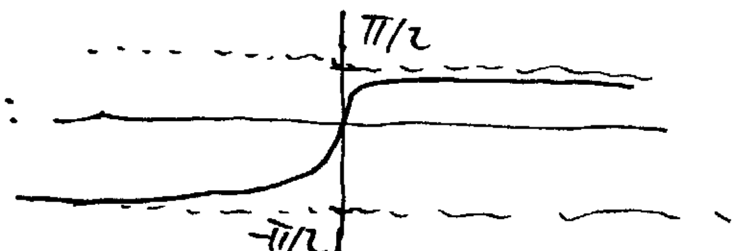
$\arcsin(x) := \sin(x)^{\langle -1 \rangle} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:



podobně

$\arccos(x) := \cos(x)^{\langle -1 \rangle} : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\arctan(x) := \tan(x)^{\langle -1 \rangle} : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:



$\text{arccot}(x) := \cot(x)^{\langle -1 \rangle} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$

Tvrzení $\forall x \in [-1,1]: \arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$

$\forall x \in \mathbb{R}: \arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \pi/2$

D. $x \in [-1,1]$, $y = \arccos(x)$. Pak $\sin(\frac{\pi}{2} - y) = \cos(y)$

Druhá identita podobně.

$\sin(\frac{\pi}{2} - \arccos(x)) = x$

$\frac{\pi}{2} - \arccos(x) = \arcsin(x)$. $\boxtimes$

Přehled derivací elementárních funkcí

- $(e^x)' = e^x$ **d.** . $x \in \mathbb{R}$.
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ **d.** .
- $(a^x)' = a^x \cdot \log(a)$, $a > 0$ pevné, $x \in \mathbb{R}$.   **d.** .
- $(\text{const})' = 0$.

- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x \geq 0$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ pro $\alpha \in \mathbb{N}$ d. ______.

- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$ d. ______.
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ d. ______.
- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, d. ______.
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$ d. ______.
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$
- $(\operatorname{arctan} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ d. ______.
- $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, —||—

$\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

secans

Extrémy, věty o střední hodnotě

$\boxed{\text{Tvrzení } \cancel{8}\,4.5}$ Nechť $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ má v a nenulovou derivaci, tj. $f'(a) \neq 0$. Potom f nemá v a lokální extrém, tj. $\forall \delta_1 > 0,\ \delta_1 < \delta$ $\exists\, c, d \in U(a,\delta_1)$, že $f(c) < f(a) < f(d)$.

D. Nechť búno $f'(a) > 0$. Pak ex. δ_2, $0 < \delta_2 < \delta$, že $x \in P(a,\delta_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Tedy
$$x \in P^+(a,\delta_2) \Rightarrow f(x) > f(a)$$
$$x \in P^-(a,\delta_2) \Rightarrow f(x) < f(a).$$
$\boxtimes$

$\boxed{\text{Důsledek}}$ $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in \vartheta$, f má v a lokální extrém. Pak $f'(a)$ buď neexistuje (není def.) nebo $f'(a) = 0$.

Příklad. ~~ex~~ (i) $f(x) = |x|$ na $[-1,1]$, (ii) $f(x) = x^2$ na $[-1,1]$, (iii) $f(x) = x^2$ na $[1,2]$.

<u>Typická úloha</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ spojitá a má na (a,b) derivaci.

$-\infty < a < b < +\infty$

Nalezněte globální extrémy f na $[a,b]$.

<u>Postup</u> 1. Víme, že f na $[a,b]$ nabývá maxima i minima (V)

2. Extrém může být jen bodem množiny

$\{x\in(a,b) : f'(x)=0\} \cup \{a,b\}$.