Exponenciální a logaritmická funkce

$2^{10}=1024$, $2^{16}=65536$, $\sqrt[5]{3}=3^{1/5}$, 1.8^{-100}, $60^{-\pi}$, ...

a^x, kde $a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$, $a>0$.

$\boxed{\text{Věta 3.10.}}$ Existuje právě jedna funkce $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ taková, že

1. $\forall x,y\in\mathbb{R}: \exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$;
2. $\forall x\in\mathbb{R}: \exp(x)\geq 1+x$.

$(\exp(x)=e^x)$

Tuto funkci nazýváme <u>exponenciální funkcí</u>

<u>Důkaz.</u> ① <u>Existence</u> Dokážeme: (i) $\forall x\in\mathbb{R}$ ex. vlastní limita

$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{=:f(x)}$, (ii) $\forall x,y\in\mathbb{R}: f(x+y)=f(x)f(y)$

(iii) $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)\geq 1+x$.

Nejprve Bernoulliova nerovnost: $(1+x)^n\geq 1+nx$ pro $\forall x\in\mathbb{R}, x\geq -1$, $\forall n\in\mathbb{N}_0$
důkaz indukcí: ~~~~~~~~.

(i) ukážeme, že posl. $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $n=1,2,\ldots$ je pro $n>n_0$ neklesající.
(x∈ℝ lib. pevné) (aby byla ≥ 0)

Ukážeme, že $\frac{(n+1)\text{-tý člen}}{n\text{-tý člen}} > 1$:

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left(\frac{-\|-}{-\|-}\right)^n =$$

$$= \frac{n+1+x}{n+1}\cdot\left(\frac{1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n = \frac{n+1+x}{n+1}\Bigg(1-\underbrace{\frac{x\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)(n+x)}}_{|\ldots|<1 \text{ pro } n>n_0}\Bigg)^n \underset{\text{Bern. ner.}}{\geq}$$

$$\geq \frac{n+1+x}{n+1}\left(1-\frac{nx}{(n+1)(n+x)}\right) = \frac{n+1+x}{n+1}\cdot\frac{(n+1)(n+x)-nx}{(n+1)(n+x)} =$$

$$= \frac{(n+(x+1))\cdot(n^2+n+x)}{(n^2+2n+1)(n+x)} = \frac{n^3+n^2(x+2)+n(2x+1)+x(x+1)}{n^3+n^2(x+2)+n(1+2x)+x} =$$

$$= \frac{\cancel{\cdots}+x^2+x}{\underbrace{\cancel{\cdots}+x}_{>0 \text{ pro } n>n_0}} \geq 1.$$ Takže $n>n_0 \Rightarrow \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n > 0.$

$>$ $x\neq 0$

Pro odhad shora stejnou metodou ukážeme, že posl. $\underbrace{b_n := \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}$ je klesající:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{n\text{-tý člen}}{(n+1)\text{-tý člen}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{1+1/(n-1)}{1+1/n}\right)^n =$$

$$= \frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n-1)(n+1)}\right)^n \underset{\text{Bern. ner.}}{\geq} \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)$$

$$= \frac{n(n^2+n-1)}{(n+1)(n^2-1)} = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1.$$ Takže $n\geq 2 \Rightarrow b_n > b_{n+1}$.

Vezmeme $k\in\mathbb{N}$, že $k>|x|$. Potom, pro $n\geq 2$,

$$0 < \left(1+\frac{x}{kn}\right)^{kn} = \left(\left(1+\frac{x/k}{n}\right)^n\right)^k < \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^k < \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}_{b_n}\right)^k.$$

Tedy (víme, že $b_2 > b_3 > b_4 > \dots$)

$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$

$$0 < \left(1+\frac{x}{kn}\right)^{kn} < b_n^k \leq b_2^k = 4^k.$$

Takže: $n>n_0 \Rightarrow 0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le 4^k$. Posl. $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\ge 1}$ je tedy omezená a pro $n>n_0$ neklesající, proto existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n =: f(x)$.

(ii) $f(x)f(y) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n =$

$= \lim\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n = \lim\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{xy/n^2}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n$

$$= \underbrace{\lim\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n}_{f(x+y)} \cdot \underbrace{\lim\left(1+\frac{xy/n^2}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n}_{=1} = f(x+y).$$

$1+\frac{x+y}{n} \to 1$

$|c_n|<C$ (c_n) omezená posl.

$\boxed{\text{Lemma}}$ $c_n\in\mathbb{R}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{c_n}{n^2}\right)^n = 1$ d. $\left(1+\frac{c_n}{n^2}\right)^n \overset{\text{binom. věta}}{=} 1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_n^k}{n^{2k}}\cdot\binom{n}{k}$

$\le 1+\sum\limits_{k=1}^{n}|C|^k\cdot\frac{1}{n^k} \le 1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|C|^k}{n^k} \to 0$ pro $n\to\infty$

proč? ~~~

Nebo pomocí Ber. ner.: ~~~

Konečně (iii): $f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} (1+x) = 1+x.$

Bern. ner., fenguje pro $n > n_0$

② Jednoznačnost. Ukážeme, že funkce $\exp$ splňující 1. a 2. musí mít i vlastnost, že $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. $\quad (\exp(0) \geq 1+0 = 1)$

1. dává indukcí: $\underline{\exp(nx) = \exp(x)^n}$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ a $\forall n \in \mathbb{N}$. Dále

$\exp(0) = \exp(0+0) = \exp(0)^2 \rightsquigarrow \exp(0)\cdot(\exp(0)-1) = 0 \rightsquigarrow \exp(0) = \begin{cases} 0 \text{ ... NE!, porušuje 2} \\ 1 \ \checkmark \end{cases}$

tedy $\underline{\exp(0) = 1}$, odtud $\underline{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}}$, protože $\underbrace{\exp(-x+x)}_{1=\exp(0)} = \exp(-x)\exp(x)$.

Takže $\cancel{\exp(\tfrac{x}{n})} = \exp\left(\frac{x}{n}\right) \geq 1+\frac{x}{n}$, $\exp\left(-\frac{x}{n}\right) \geq 1-\frac{x}{n}$ (z 2) dává,

pro $n > n_0$ (aby $1 \pm \frac{x}{n} > 0$) $\quad \underline{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(x) = \exp\left(\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}}$

Máme $1 \le \frac{\exp(x)}{(1+\frac{x}{n})^n} \le \frac{1}{(1-\frac{x}{n})^n(1+\frac{x}{n})^n} = \frac{1}{(1-\frac{x^2}{n^2})^n} \to 1$ pro $n \to \infty$

podle Lemmatu. Tedy nutně $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n = \exp(x)$. $\boxtimes$

<u>Další vlastnosti exponenciální funkce.</u>

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ plyne z 2.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$: $\left.\begin{array}{l} 1+x \le \exp(x) \\ 1-x \le \exp(-x) \end{array}\right\} 1+x \le \exp(x) \le \frac{1}{1-x}$.
  (pro $x < 1$)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$: z $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

- $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$: pro $x \in (-1, +\infty)$ z 2, pro $x < 0$ z .

- $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 : \exp(x) > 1$ (kdyby $\exp(x_0) \le 1$ pro nějaké $x_0 > 0$,
  pak $\exp(nx_0) = \exp(x_0)^n \le 1$ pro $\forall n$ – spor.

- $\exp(x)$ je na $\mathbb{R}$ rostoucí: $x<y$, pak $\dfrac{\exp(y)}{\exp(x)} = \exp(\underbrace{y-x}_{>0}) > 1$.
- $\exp(x)$ je na $\mathbb{R}$ spojitá: $\lim\limits_{x\to a} (\exp(x) - \exp(a)) = \cancel{\lim\limits_{x\to a}\left(\exp(a)\,\frac{\exp(x-a)-1}{}\right)}$

$$= \lim_{x\to a}\left(\exp(a)\cdot \underbrace{\frac{\exp(x-a)-1}{x-a}}_{\to 1 \text{ pro } x\to a} \cdot \underbrace{(x-a)}_{\to 0}\right) = 0, \text{ tj. } \lim_{x\to a} \exp(x) = \exp(a),$$

tj. exp je spojitá v a.

<u>Eulerovo číslo</u> $e := \exp(1)$. Víme, že $e \stackrel{\text{def}}{=} \exp(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$e = 2.71828\ldots$ ~~Také~~ Místo $\exp(x)$ píšeme i e^x.

- $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$, tj. $\{\exp(x) : x\in\mathbb{R}\} = \{y\in\mathbb{R} : y>0\}$.

<u>D.</u> Víme, že $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^+$. Dále $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.
$\rightsquigarrow$ $\forall y\in\mathbb{R}, y>0$ $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1<x_2$, že $\exp(x_1) < y < \exp(x_2)$. Podle Darbouxovy věty $\exists x_3$, $x_1<x_3<x_2$, že $\exp(x_3) = y$. $\rightsquigarrow$ $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. $\boxtimes$