<u>Příklad</u> $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ neexistuje. <u>D.</u> Tabule ~~~.

👁 f má v $a \in \mathbb{R}^*$ vl. limitu $\Rightarrow$ ex. $\delta > 0$, že f je na $P(a,\delta)$ omezená!

$\boxed{\text{Tvrzení 3.3}}$ (aritmetika limit)

$f: M \to \mathbb{R}$, $g: \cancel{M}\, N \to \mathbb{R}$

ex. $\delta_0 > 0$, že $P(a,\delta_0) \subset M \cap N$

$a, A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Potom

1. $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = A+B$, je-li tento součet definován
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,g(x) = AB$, —"— součin —"—
3. Nechť $B \neq 0$ a ex. $\delta > 0$, že $g(x) \neq 0$ pro $\forall x \in P(a,\delta)$. Pak $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, —"— podíl —"—.

<u>D.</u> Tabule ~~~

$\boxtimes$

Tvrzení 3.4 (funkční limita a uspořádání)

$c \in \mathbb{R}^*$. 1. $\lim\limits_{x\to c} f(x) > \lim\limits_{x\to c} g(x) \Rightarrow \exists \delta > 0$, že $f(P(c,\delta)) > g(P(c,\delta))$

(tj. $\forall x \in P(c,\delta): f(x) > g(x)$)

2. Nechť ex. $\delta > 0$, že $\forall x \in P(c,\delta)$: $f(x) \leq g(x)$. Pak i $\lim\limits_{x\to c} f(x) \leq \lim\limits_{x\to c} g(x)$, pokud obě limity existují.

3. Nechť ex. $\delta > 0$, že $\forall x \in P(c,\delta)$: $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ a nechť $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom i $\lim\limits_{x\to c} h(x) = A$.

D. Tabule . $\boxtimes$

Připomenutí: funkce f je spojitá v $a \in \mathbb{R}$, je-li definovaná na nějakém $U(a,\delta)$ a $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |a - x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$, tj. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Podobně pro jednostrannou spojitost.

<u>Důsledek Tvrzení 3.3</u>: Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $c \in \mathbb{R}$, pak i funkce $f+g$, fg a $\frac{f}{g}$ (za předp., že $g(c) \neq 0$) jsou spojité v c.

<u>Příklad</u> • Každý polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ s reálnými koeficienty a_i je spojitý v každém bodě $c \in \mathbb{R}$.

• Každá racionální funkce $r(x) = \dfrac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ a $b_m \neq 0$, je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R}$, který není kořenem jmenovatele.

<u>D</u>. Tabule.

Věta 3.5 (limita složené funkce)

Nechť $\lim_{x \to c} g(x) = A$, $\lim_{x \to A} f(x) = B$. Je-li splněna podmínka P1 nebo podmínka P2, pak i $\lim_{x \to c} f(g(x)) = B$. $(c, A, B \in \mathbb{R}^*)$

P1: f je spojitá v A. P2: Ex. $\eta > 0$, že $\forall x \in P(c, \eta)$ máme $g(x) \neq A$.

D. Tabule.

⊠

<u>Poznámka</u> Proč musíme předpokládat P1 nebo P2?

$\boxed{\text{Věta 3.6}}$ (~~[illegible]~~ limita monotónní funkce)

Nechť $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, kde $-\infty\le a<b\le+\infty$ a f je monotónní na intervalu (a,b). Potom existují limity $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$.

⊠

D. Tabule ~~~~~~~~.

Funkce spojité na intervalu

<u>Definice</u> Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu J, když je f spojitá v každém vnitřním bodě intervalu J a v každém krajním bodě intervalu J je f příslušným způsobem ~~z~~ jednostranně spojitá.

<u>Příklady</u>

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ J=(0,1),\ f(x)=\frac{1}{x} \\ \bullet\ J=(0,1],\ \text{—"—} \end{array}\right\}\ f \text{ je spojitá na } J$$

- $J=[0,1]$, $f(x)=\frac{1}{x}$ pro $x\in(0,1]$ — f není spojitá na J.

$\boxed{\text{Věta 3.7}}$ (Darbouxova, o nabývání mezihodnot)

Nechť $-\infty < a \leq b < +\infty$ a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,b]$. Pak

$f(a) \leq c \leq f(b) \Rightarrow$ existuje $\alpha \in [a,b]$, že $f(\alpha) = c$. $\qquad a \in A$

D. ~~A~~ $\underline{\text{BÚNO } f(a) < c < f(b).}$ Nechť $A = \{z \in [a,b] : f(z) < c\}$. Polo-

žíme $\alpha = \sup(A)$ a ukážeme, že $f(\alpha) = c$. $\qquad \alpha + \delta \in A$

patrně $a < \alpha < b$. Kdyby $f(\alpha) < c$, pak i $f(\alpha + \delta) < c$ pro nějaké $\delta > 0$ – spor

Kdyby $f(\alpha) > c$, pak $\exists\, \delta > 0$, že $\forall x \in (\alpha - \delta, \alpha] : f(x) > c$ – spor. $\boxtimes$