3 Limity a spojitost funkcí jedné reálné proměnné

Od posloupností, tj. zobrazení $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, přejdeme k reálným funkcím $f: M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$. Typicky M = interval.

$f: M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$, je:

rostoucí: $\forall x, y \in M: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

klesající: ——— || ——— $f(x) > f(y)$

neklesající: $\leq$, nerostoucí: $\geq$.

shora omezená: $\exists c$, že $\forall x \in M: f(x) < c$. Podobně zdola omezená, omezená. (ex. $c > 0$, že $x \in M \Rightarrow |f(x)| < c$)

sudá: $\forall x \in M: -x \in M$ & $f(x) = f(-x)$

lichá: ——— || ——— $f(x) = -f(-x)$

periodická s periodou p: $\forall x \in M: x \pm p \in M$ & $f(x) = f(x \pm p)$

<u>Okolí bodu</u> $a, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$: $U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta\}$.

$U(+\infty,\delta) = (1/\delta, +\infty)$

$U(-\infty,\delta) = (-\infty, -1/\delta)$

$U^+(a,\delta) = [a, a+\delta)$ – <u>pravé okolí</u>

$U^-(a,\delta) = (a-\delta, a]$ – <u>levé okolí</u>

<u>prstencová okolí</u> jsou obyč. okolí s vyjmutým bodem a:

$P(a,\delta) = U(a,\delta) \setminus \{a\}$, $P^+(a,\delta) = U^+(a,\delta) \setminus \{a\}$, atd. pro $a = \pm\infty$ stejné jako obyč. okolí. $P(a,\delta) =$

<u>Definice</u> $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$. Funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ <u>limitu rovnou</u> $A \in \mathbb{R}^*$, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in P(a,\delta) \cap M \Rightarrow f(x) \in U(A,\varepsilon)$.

<u>Poznámka.</u> f nemusí být v a definovaná! Obvykle budeme mít situaci, že $P(a,\delta) \subset M$ pro nějaké $\delta > 0$.

<u>Budeme předpokládat, že $P(a,\delta) \cap M \neq \emptyset\ \forall \delta > 0$.</u>

Značení: $\lim_{x \to a} f(x) = A$

Příklady • $a\in\mathbb{R}$, $A\in\mathbb{R}$, pak $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : |x-a|<\delta, x\neq a \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$

$P(a,\delta)\subset M$ pro nějaké $\delta>0$. $\quad (0<|x-a|<\delta)$

~~(pokud je $f(x)$ definována)~~

• $f(x)=x \quad (M=\mathbb{R})$

$a\in\mathbb{R}$, pak $\lim\limits_{x\to a} x = a$

• $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 \dots x>0 \\ 0 \dots x=0 \\ -1 \dots x<0 \end{cases}$ $\quad (M=\mathbb{R})$

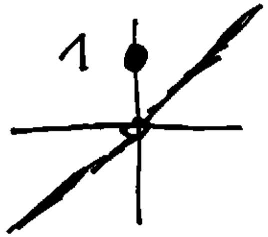
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \, ? \quad a\in\mathbb{R}$

$= 1 \dots a>0$

$=$ neex. $\dots a=0$

$= -1 \dots a<0.$

• f: $(M=\mathbb{R})$



tj $f(x) = \begin{cases} x \dots x\neq 0 \\ 1 \dots x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$, když $a\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \cancel{\nexists}\ 0$

• $M=\mathbb{R}$, $a=-\infty$, $A=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty \iff \forall K\ \exists L: x<L \Rightarrow f(x)>K.$

• $M=\mathbb{Q}$, $a=\sqrt{2}$, $f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{b}$, kde $\frac{a}{b}$ je v základním tvaru.

$f\left(\frac{10}{5}\right) = f\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{1}{1} = 1.$ $\qquad \lim\limits_{x\to \sqrt{2}} f(x) = \cancel{\nexists}\ 0$

Jednostranné limity $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\overset{+}{P}(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$ pro $\forall \delta > 0$.

Funkce f má v bodě a limitu zprava rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, pokud

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in P^+(a,\delta) \cap M \Rightarrow f(x) \in U(A,\varepsilon)$.

Podobně limita zleva ($P^+(a,\delta)$ se nahradí $P^-(a,\delta)$)

Značení: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$. $x \to a+0$

V $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \iff \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$ & $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$.

$\boxed{\text{Def.}}$ $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$, $U(a,\delta) \subset M$ pro nějaké $\delta > 0$. Funkce f je $a \in \mathbb{R}$, **spojitá** v bodě a, když $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

spojitá zprava: $U^+(a,\delta) \subset M$ pro nějaké $\delta > 0$ a $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

spojitá zleva: podobně.

$\boxed{\text{Věta 3.1}}$ Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

D. $A, B \in \mathbb{R}^*$, $A \neq B$, buďte limity funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. ~~Vez~~ Vezmeme $\varepsilon > 0$ tak malé, že $U(A,\varepsilon) \cap U(B,\varepsilon) = \emptyset$. Pak má existovat $\delta_1 > 0$ (δ_2), že

$x \in P(a,\delta_1) \Rightarrow f(x) \in U(A,\varepsilon)$ $\qquad \delta := \min(\delta_1, \delta_2)$

$x \in P(a,\delta_2) \Rightarrow f(x) \in U(B,\varepsilon)$

$x \in P(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(A,\varepsilon) \cap U(B,\varepsilon)$, což nelze (předp., že ex. $x \in P(a,\delta)$, že f je v x definovaná). ☒

$\boxed{\text{Věta 3.2}}$ (Heineho definice limity)

$a \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, $P(a,\delta) \subset M$ pro nějaké $\delta > 0$, $f: M \to \mathbb{R}$. Následující

A) je ekvivalentní

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. 2. $\forall (x_n) \subset M$, $x_n \neq a$ pro každé n, platí:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

D. ∼ tabule. ☒