Kritéria neabsolutní konvergence řad a přerovnávání řad

Připomeňme si: $\sum a_n$ konv. absolutně, když $\sum |a_n|$ konv.

absolutní konv. $\Rightarrow$ konv., ale obecně ne naopak (viz např. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$).

viděli jsme Leibnizovo kritérium neabs. konvergence:

$$\left(a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0 \text{ a } a_n \to 0\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots$$

konverguje.

$(-1)^{n+1} a_n = b_n a_n$, kde $(b_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, ale má omezené část. součty: $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$.

Niels Abel (1802–1829)

Peter Dirichlet (1805–1859)

$\boxed{\text{Věta 2.20}}$ (Abelovo a Dirichletovo kritérium) neabsolutní konvergence

Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, kde $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$.

1. (Abelovo kritérium) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konv.
2. (Dirichletovo kritérium) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right.$ má omezené část. součty & $\left. a_n \to 0\right) \Rightarrow$ —"—.

Pozn. Leibnizovo krit. ※ je zvláštní případ Dirichletova krit. Obě kritéria (A. a D.) jsou neporovnatelná, jedno není silnější než druhé.

$\boxed{\text{Lemma 2.21}}$ (Abelova parciální sumace)

$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, $s_k := b_1 + b_2 + \dots + b_k$. Potom

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \underline{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n} = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) s_i + a_n s_n$$

$b_1 = s_1$ $\quad b_3 = s_3 - s_2$

$b_2 = s_2 - s_1$

$$= \underline{(a_1 - a_2) s_1 + (a_2 - a_3) s_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n) s_{n-1} + a_n s_n}.$$

D. $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = a_1 s_1 + a_2 (s_2 - s_1) + a_3 (s_3 - s_2) + \dots + a_n (s_n - s_{n-1}) = (a_1 - a_2) s_1 + (a_2 - a_3) s_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n) s_{n-1} + a_n s_n.$ ⊠

Důsledek Pokud navíc $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$, pak

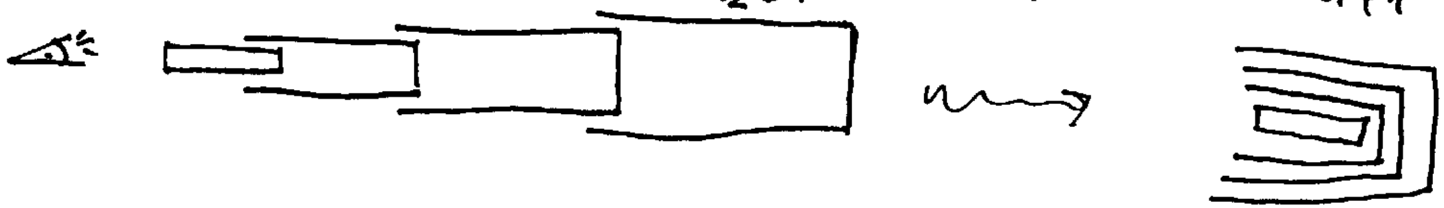
$$a_1 \min_{1 \leq i \leq n} (s_i) \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq a_1 \cdot \max_{1 \leq i \leq n} (s_i).$$

D. tabule. ⊠

Poznámka („dalekohledová" řada, telescoping series)

$(a_n)\subset\mathbb{R}$, $a_n\to 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1$

D. $s_1=a_1-a_2$, $s_2=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)=a_1-a_3$, $s_3=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)=$
$=a_1-a_4$, …, $s_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}\to a_1$. ⊠



Příklad $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\dots=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=?$

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, takže součet je přesně $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\dots=\frac{1}{2}$.

Důkaz Abelova a Dirichletova kritéria. Pomocí Cauchyovy p. pro řady.

Pro $m\ge n$ označme $t(m,n):=b_n+b_{n+1}+\dots+b_m$.

$$a_n\cdot\min_{n\le i\le m}t(m,i)\le a_nb_n+a_{n+1}b_{n+1}+\dots+a_mb_m\le a_n\cdot\max_{n\le i\le m}t(m,i)$$

atd., tabule. ⊠

Příklady • $\frac{1}{1}-\frac{5}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{4}-\frac{5}{5}+\frac{4}{6}+\frac{1}{7}-\frac{5}{8}+\frac{4}{9}+\frac{1}{10}-\frac{5}{11}+\dots$

$= \sum_{n\geq 1} a_n b_n$, kde $a_n = \frac{1}{n}$ a $(b_n) = (\underbrace{1,-5,4}_{\Sigma=0}, \underbrace{1,-5,4}_{\Sigma=0}, \underbrace{1,-5,4}_{\Sigma=0} \dots)$

$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$

⇝ konverguje podle D. kritéria. Obecněji: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$, $a_n \to 0$ a (b_n) je periodická (popř. periodická od určitého indexu) a součet členů periody $= 0$ $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n b_n$ konv. podle Dir. kritéria.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$. Zde $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ a $(b_n) = (\sin 1, \sin 2, \sin 3, \dots)$. Dá se ukázat, že $\sum b_n$ má omezené částečné součty. ⇝ konv. podle Dir. krit.

Přerovnávání řad

$p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ buď bijekce (permutace množiny $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$) a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ buď řada. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ nazveme přerovnáním řady $\sum a_n$.

Příklady. $a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + a_8 + a_7 + \dots$

$a_1 + a_3 + a_2 + a_6 + a_5 + a_4 + a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 + a_{15} + a_{14} + a_{13} + \dots$

Věta 2.21 (přerovnání abs. konv. řadám nevadí)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je abs. konvergentní řada. Každé její přerovnání je abs. konvergentní a má stejný součet, jako původní řada.

D. Pomocí Cauchyovy podmínky pro řady a pozorování, že pro každou permutaci $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ platí: $\forall N\in\mathbb{N}\ \exists n_0\in\mathbb{N}: n>n_0 \Rightarrow p(n)>N$. (tj. $\lim_{n\to\infty} p(n)=+\infty$)

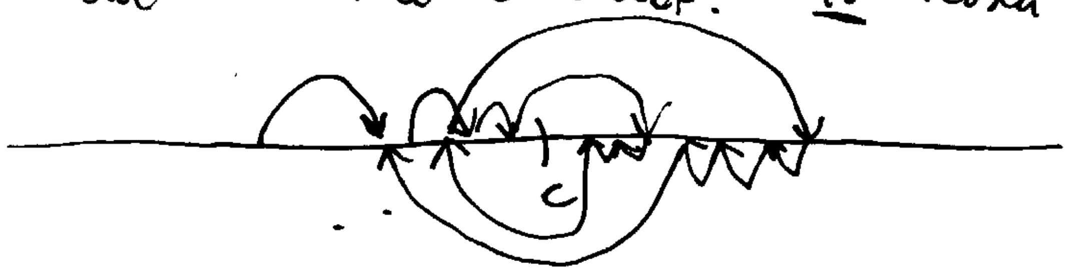
tabule ~~~~~ $\boxtimes$

Bernhard Riemann (1826–1866)

Věta 2.22 (Riemannova o přerovnání neabs. konv. řady)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$. Pak pro každé $c\in\mathbb{R}^*$ existuje přerovnání řady, které má součet c. Součet řady, která konverguje, ale ne absolutně, tedy lze přerovnáním libovolně změnit. Př řada $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots$

D. tabule ~~~~.



$\boxtimes$