Přednáška 9, 30. listopadu 2015

Důsledek. *Nechť má* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *kladný poloměr konvergence* $R > 0$. *Pak i mocninné řady*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad a \quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

mají poloměr konvergence R, *a na intervalu* $(-R, R)$ *jimi určené funkce (tj. jejich součty) splňují, že* $g = \int f$ *a* $h = f'$.

Důkaz. Že poloměry obou nových moc. řad zůstávají rovny R plyne z Hadamardova vzorce a z limity $\lim n^{1/n} = 1$. Že $g = \int f$ a $h = f'$ plyne z věty o výměně sumace a integrálu a věty o výměně sumace a derivace, díky lokálně stejnoměrné konvergenci moc. řady na intervalu konvergence. $\square$

Funkce f daná mocninnou řadou tedy má na intervalu konvergence primitivní funkci i derivaci (speciálně je f spojitá), a tyto funkce jsou opět dané mocninnými řadami, které vzniknou z původní mocninné řady integrací popřípadě derivací člen po členu. Totéž (tj. derivování člen po členu) můžeme udělat i s řadou pro f' a tak dál. Vidíme, že funkce f daná mocninnou řadou má na intervalu konvergence derivace všech řádů, opět dané mocninnými řadami, jež vzniknou postupnou derivací člen po členu mocninné řady pro f a mají stejný poloměr konvergence. Odtud plyne, že třeba funkci f definovanou jako $f(x) = 0$ pro $x \le 0$ a $f(x) = x^2$ pro $x \ge 0$, nelze na žádném okolí nuly vyjádřit mocninnou řadou: $f''(0)$ neexistuje.

Věta (Abelova, o mocninné řadě). *Nechť má* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *kladný a konečný poloměr konvergence* R *a tato mocninná řada konverguje v* $x = R$. *Pak*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows \quad \text{na } [0, R] \text{ a } \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \ .$$

Lemma (Abelova nerovnost). *Nechť* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *kde* $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0$, *a nechť* $A = \max_{1 \le i \le n} |a_1 + a_2 + \cdots + a_i|$. *Pak*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \le A b_1 \ .$$

Důkaz. Úloha 1. $\square$

Důkaz Abelovy věty. Bez újmy na obecnosti $R = 1$ (proč? — úloha 2). Pak číselná řada $\sum a_n 1^n = \sum a_n$ konverguje a pro dané $\varepsilon > 0$ máme n_0, že pro $n \geq m > n_0$ je $|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$. Pro $n \geq m > n_0$ pak podle Abelovy nerovnosti (a_n jsou a_n a $b_n = x^n$) i pro každé $x \in [0, 1]$ je $|a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n| \leq \varepsilon x^m \leq \varepsilon$. Řada funkcí $\sum a_n x^n$ tak na $[0, 1]$ splňuje stejnoměrnou B.–C. podmínku a stejnoměrně konverguje. Druhá část plyne hned záměnou sumace a limity funkce v bodě podle věty z minulé přednášky. $\square$

Příklad. Sečteme řadu $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, která neabsolutně konverguje podle Leibnizova kritéria. Podle Abelovy věty a podle Taylorova rozvoje logaritmu máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \lim_{x \to 1^-} \log(1 + x) = \log 2 \,.$$

Řada má proto součet $\log 2$. Stejnou metodou lze sečíst i spoustu dalších nekonečných číselných řad (úlohy 2, 3, 4 a 5).

Fourierovy řady. *Trigonometrickou řadou* rozumíme nekonečnou řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \,,$$

kde $a_0, a_1, \ldots$ a $b_1, b_2, \ldots$ jsou reálné koeficienty a proměnná x probíhá $\mathbb{R}$. Pro danou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prozkoumáme otázku, kdy se dá vyjádřit součtem takové řady funkcí a jaké povahy je konvergence. Ve srovnání s mocninnými řadami lze trigonometrickými řadami vyjádřit širší třídu funkcí. Jak jsme viděli, součet mocninné řady s kladným poloměrem konvergence je spojitá funkce, která má na intervalu konvergence derivace všech řádů. Funkce, která v nějakém bodě nemá derivaci vůbec nebo ji nemá vlastní (např. $|x|$ na intervalu $(-1, 1)$), neřkuli nespojitá funkce, se proto nedá vyjádřit součtem mocninné řady. Uvidíme, že mnoho takových funkcí — třeba zmíněná $|x|$ na intervalu $(-1, 1)$ nebo i různé nespojité funkce — lze vyjádřit součtem vhodné trigonometrické řady, tzv. *Fourierovy řady* dané funkce.

Protože $\cos(nx)$ a $\sin(nx)$ jsou 2π-periodické funkce, je jasné, že každý bodový součet trigonometrické řady je také 2π-periodická funkce. Každá 2π-periodická funkce f je jednoznačně určená svými hodnotami na intervalu $[-\pi, \pi)$ nebo jakémkoli jiném intervalu tvaru $[a, a + 2\pi)$.

Pro $f, g \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, což jsou funkce s Riemannovým integrálem na intervalu $[-\pi, \pi]$, definujeme značení

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} fg \ .$$

Z vlastností integrálu snadno plyne, že pro každé $f_1, f_2, g \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ a každé $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ platí:

- (symetrie) $\langle f_1, f_2\rangle = \langle f_2, f_1\rangle$;
- (bilinearita) $\langle a_1 f_1 + a_2 f_2, g\rangle = a_1\langle f_1, g\rangle + a_2\langle f_2, g\rangle$ a stejně (díky symetrii) ve druhé souřadnici;
- (positivní semidefinitnost) $\langle g, g\rangle \geq 0$.

Máme tak skoro všechny vlastnosti skalárního součinu, kromě $\langle g, g\rangle = 0 \Rightarrow g = 0$, která není splněna, protože z nulovosti integrálu neplyne nulovost integrandu, i když je nezáporný.

Tvrzení (ortogonální systém sinů a cosinů). *Pro každá dvě čísla $m, n \in \mathbb{N}_0$ máme*

$$\langle \sin(mx), \cos(nx)\rangle = 0 \ .$$

Pro každá dvě čísla $m, n \in \mathbb{N}_0$, pokud nejsou současně nulová, máme

$$\langle \sin(mx), \sin(nx)\rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx)\rangle = \begin{cases} \pi & \text{pro } m = n \\ 0 & \text{pro } m \neq n \ . \end{cases}$$

Pro $m = n = 0$ máme $\langle \sin(0x), \sin(0x)\rangle = 0$ a $\langle \cos(0x), \cos(0x)\rangle = 2\pi$.

Důkaz. Příště. □

Fourierovy koeficienty $a_0, a_1, \ldots$ a $b_1, b_2, \ldots$ funkce $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ jsou definovány jako

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\langle f, \cos(nx)\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{\langle f, \sin(nx)\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx,\ n = 1, 2, \ldots \ . \end{aligned}$$

Proč jsou tak definované? Předpokládejme, že funkce $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ je na $[-\pi,\pi]$ stejnoměrným součtem trigonometrické řady

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\ .$$

Z vlastností součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ plyne, že pak a_n a b_n musejí být rovny Fourierovým koeficientům funkce f. Například, pro $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
\langle f,\cos(kx)\rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)),\cos(kx)\right\rangle\\
&= (a_0/2)\langle\cos(0x),\cos(kx)\rangle\\
&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\langle\cos(nx),\cos(kx)\rangle+b_n\langle\sin(nx),\cos(kx)\rangle)\\
&= a_k\langle\cos(kx),\cos(kx)\rangle \text{ pro } k>0\\
&\quad \text{ a } (a_0/2)\langle\cos(0x),\cos(0x)\rangle \text{ pro } k=0\\
&= \pi a_k\ ,
\end{aligned}$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili stejnoměrnou konvergenci (umožňující zaměnit pořadí integrace a nekonečné sumace podle věty z minulé prednášky) a vlastnosti skalárního součinu a ve třetí a čtvrté rovnosti jsme použili předchozí tvrzení. Takže $a_k=\langle f,\cos(kx)\rangle/\pi$ a podobně pro b_k, $k\in\mathbb{N}$.

Fourierovou řadou funkce $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ rozumíme trigonometrickou řadu, jejíž koeficienty a_n a b_n jsou rovny Fourierovým koeficientům funkce f. Jak jsme viděli, pokud nějaká trigonometrická řada stejnoměrně konverguje k f, musí to být její Fourierova řada. Ukážeme postačující podmínky na funkci f, aby její Fourierova řada k ní konvergovala.

Věta (B. nerovnost a R.–L. lemma). *Nechť $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ a čísla $a_0,a_1,\ldots,b_1,b_2,\ldots$ jsou Fourierovy koeficienty funkce f.*

1. *(Besselova nerovnost). Platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{\langle f,f\rangle}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2\ .$$

Tedy řada čtverců Fourierových koeficientů funkce f konverguje.

2. *(Riemannovo–Lebesgueovo lemma). Pro* $n \to \infty$ *platí, že* $a_n \to 0$ *a* $b_n \to 0$*, tedy*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0 \quad a \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0\ .$$

Důkaz. Je jasné, že 1 $\Rightarrow$ 2: z konvergence řady čísel $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ plyne, že $a_n^2, b_n^2 \to 0$, tedy $a_n, b_n \to 0$. Dokažme tedy Besselovu nerovnost. Jako $s_n = s_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, označíme n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f:

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n}(a_k'\cos(kx) + b_k'\sin(kx))\ ,$$

kde

$$a_k = \pi^{-1}\langle f, \cos(kx)\rangle,\ b_k = \pi^{-1}\langle f, \sin(kx)\rangle,\ k = 0, 1, 2, \ldots\ ,$$

$a_0' = a_0/2$, $a_k' = a_k$ pro $k > 0$, $b_0' = 0$ a $b_k' = b_k$ pro $k > 0$. Díky linearitě (skoro)skalárního součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$, definici čísel a_k', b_k', a_k, b_k a ortogonalitě funkcí $\sin(kx)$ a $\cos(kx)$ se $\langle s_n, s_n\rangle$ rovná

$$\sum_{k=0}^{n}((a_k')^2\langle\cos(kx), \cos(kx)\rangle + (b_k')^2\langle\sin(kx), \sin(kx)\rangle) = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right)$$

a také

$$\langle s_n, f\rangle = \sum_{k=0}^{n}(a_k'\langle\cos(kx), f\rangle + b_k'\langle\sin(kx), f\rangle) = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right)\ .$$

Na druhou stranu máme $0 \le \langle f - s_n, f - s_n\rangle = \langle f, f\rangle - 2\langle s_n, f\rangle + \langle s_n, s_n\rangle$, tudíž $2\langle s_n, f\rangle - \langle s_n, s_n\rangle \le \langle f, f\rangle$. Takže

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{2\langle s_n, f\rangle - \langle s_n, s_n\rangle}{\pi} \le \frac{\langle f, f\rangle}{\pi}$$

pro každé n. Řada čtverců F.-ových koeficientů funkce f tedy konverguje a její součet je shora omezen uvedenou hodnotou. $\square$

Úlohy

1. Dokažte Abelovu nerovnost.

2. Proč můžeme v důkazu Abelovy věty předpokládat, že poloměr konvergence dané mocninné řady je 1?

3. Ještě čtyři příklady či protipříklady k Abelově větě. Nechť $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je odpovídající mocninná řada s $R = 1$.

   (a) Dokažte, že když S má součet $+\infty$, pak i $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ (totéž s $-\infty$).

   (b) Najděte příklad $f(x)$, že existuje vlastní limita $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, ale S nemá součet.

   (c) Najděte příklad $f(x)$, že limita $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ neexistuje (vlastní ani nevlastní).

   (d) Je pravda, že z $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ plyne $S = +\infty$?

4. Z $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ odvoďte, že $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$.

5. $$\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots = ?$$
   (A co $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots$?)

6. $$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots = ?$$

7. $$\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} - \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots = ?$$

8. Pro x v okolí $\frac{1}{2}$ funkci
   $$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$
   (střed $x_0 = 0$) vyjádřete součtem mocninné řady se středem v $x_0 = \frac{1}{2}$. Jaké jsou poloměry konvergence obou mocninných řad? Na jakém intervalu platí obě vyjádření funkce $f(x)$?

9. Dokažte, že funkce $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ je definovaná na $(1, +\infty)$ a má tam derivace všech řádů.

10. Nalezněte poloměr konvergence následující mocninné řady. Jak je to s konvergencí v krajních bodech intervalu konvergence? Návod: Stirlingova aproximace faktoriálu.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n .$$