Přednáška 8, 10. dubna 2015

Důkaz. Omezíme se na případ dvou proměnných x a y ($m = 2$) a bod $a = \overline{0} = (0,0)$, pro více proměnných se postupuje podobně. Rovněž můžeme předpokládat, že $U \subset \mathbb{R}^2$ je koule (tedy otevřený kruh) se středem v počátku. Nechť $h = (h_1, h_2) \in U$ a $h' = (h_1, 0)$. Přírůstek $f(h) - f(\overline{0})$ napíšeme pomocí přírůstků ve směrech obou souřadnicových os:

$$f(h) - f(\overline{0}) = (f(h) - f(h')) + (f(h') - f(\overline{0}))\ .$$

Úsečky $h'h$ a $\overline{0}h'$ obě leží v U, funkce f je na nich definovaná a na první úsečce závisí pouze na proměnné y a na druhé jen na x. Pro obě úsečky a funkci f použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě (pro funkce jedné proměnné):

$$f(h) - f(\overline{0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta_2) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta_1) \cdot h_1\ ,$$

kde ζ_2 (resp. ζ_1) je nějaký vnitřní bod úsečky $h'h$ (resp. $\overline{0}h'$). Body ζ_1 a ζ_2 leží v otevřené kouli $B(\overline{0}, \|h\|)$. Díky spojitosti obou parciálních derivací v počátku máme

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\zeta_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{0}) + \alpha(\zeta_2) \ \text{ a } \ \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{0}) + \beta(\zeta_1)\ ,$$

kde $\alpha(h)$ i $\beta(h)$ je $o(1)$ pro $h \to \overline{0}$ (tj. pro každé $\varepsilon > 0$ máme $\delta > 0$, že $\|h\| < \delta \Rightarrow |\alpha(h)| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$ a totéž pro $\beta(h)$). Tedy

$$f(h) - f(\overline{0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{0}) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{0}) \cdot h_1 + \alpha(\zeta_2)h_2 + \beta(\zeta_1)h_1\ .$$

Z trojúhelníkové nerovnosti a nerovností $0 < \|\zeta_1\|, \|\zeta_2\| < \|h\|$ a $|h_1|, |h_2| \le \|h\|$ plyne, že když $\|h\| < \delta$, tak

$$|\alpha(\zeta_2)h_2 + \beta(\zeta_1)h_1| \le |\alpha(\zeta_2)| \cdot \|h\| + |\beta(\zeta_1)| \cdot \|h\| \le 2\varepsilon\|h\|\ .$$

Tedy $\alpha(\zeta_2)h_2 + \beta(\zeta_1)h_1 = o(\|h\|)$ pro $h \to \overline{0}$. Podle definice diferenciálu je funkce f diferencovatelná v počátku. $\square$

Zobecníme Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkce více proměnných.

Tvrzení (Lagrange pro funkce několika proměnných). *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina obsahující úsečku $u = ab$ s koncovými body a a b a $f : U \to \mathbb{R}$ je funkce, jež je spojitá v každém bodě u a má v každém vnitřním bodě u diferenciál. Pak pro nějaký vnitřní bod ζ úsečky u platí, že*

$$f(b) - f(a) = \mathrm{D}f(\zeta)(b-a) \ .$$

Rozdíl hodnot funkce v krajních bodech úsečky se tedy rovná hodnotě jejího diferenciálu v nějakém vnitřním bodě úsečky na směrovém vektoru úsečky.

Důkaz. Udělejte si jako cvičení, s pomocí funkce $F(t) = f(a + t(b-a))$, kde reálné číslo t probíhá interval $[0,1]$. $\square$

Otevřená množina $D \subset \mathbb{R}^m$ je *souvislá*, když lze každé dva její body spojit lomenou čarou, jež celá leží v D. Příklady souvislých otevřených množin: koule v $\mathbb{R}^m$, celé $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^3 \backslash L$, kde L je sjednocení konečně mnoha přímek. Na druhou stranu ale $B \backslash R$, kde B je otevřená koule v $\mathbb{R}^3$ a R rovina protínající B, je otevřená avšak nikoli souvislá množina.

Důsledek ($\partial = 0 \Rightarrow f \equiv$ const.). *Má-li funkce m proměnných f v každém bodě otevřené a souvislé množiny U nulový diferenciál, je na U konstantní. Totéž platí, má-li f v každém bodě U nulovou každou parciální derivaci.*

Důkaz. Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená a souvislá množina a funkce $f : U \to \mathbb{R}$ má na U nulový diferenciál. Vezmeme dva libovolné body $a, b \in U$ a spojíme je lomenou čarou $s = s_1 s_2 \dots s_r$ ležící v U. Pro libovolnou úsečku $s_i = a_i b_i$ z s máme díky předchozímu tvrzení a předpokladu o f, že

$$f(a_i) - f(b_i) = \mathrm{D}f(\zeta)(a_i - b_i) = 0$$

(ζ je nějaký vnitřní bod s_i), tedy $f(a_i) = f(b_i)$. Hodnoty funkce f na koncích všech úseček s_i se rovnají a tedy $f(a) = f(b)$.

Má-li f v každém bodě U nulovou každou parciální derivaci, je podle tvrzení z minulé přednášky v každém bodě U diferencovatelná a (podle vyjádření diferenciálu pomocí parciálních derivací) její diferenciál je vždy nulový, čímž jsme v předchozí situaci. $\square$

Počítání s parciálními derivacemi a diferenciály. Pro dvě funkce $f, g : U \to \mathbb{R}$, které jsou definované na okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu $a \in U$ a mají v bodě a parciální derivaci podle proměnné x_i, máme pro parciální derivaci podle

x_i jejich lineární kombinace, součinu a podílu stejné vzorce jako v případě funkcí jedné proměnné (místo $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ píšeme stručně $\partial_i f$):

$$\begin{aligned}
\partial_i(\alpha f + \beta g)(a) &= \alpha\partial_i f(a) + \beta\partial_i g(a) \\
\partial_i(fg)(a) &= g(a)\partial_i f(a) + f(a)\partial_i g(a) \\
\partial_i(f/g)(a) &= \frac{g(a)\partial_i f(a) - f(a)\partial_i g(a)}{g(a)^2} \quad \text{(pokud } g(a) \neq 0\text{)} .
\end{aligned}$$

Tyto vzorce jsou fakticky vzorce pro funkce jedné proměnné, protože ∂_i se počítá z funkce závisející jen na x_i. Podobně pro diferenciály:

Tvrzení (počítání s diferenciály). *Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí bodu a a $f, g : U \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, obě diferencovatelné v a.*
1. *Když $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak i funkce $\alpha f + \beta g$ je v a diferencovatelná a*

$$\mathrm{D}(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha \mathrm{D} f(a) + \beta \mathrm{D} g(a) .$$

2. *Součinová funkce fg je též diferencovatelná v a a*

$$\mathrm{D}(fg)(a) = g(a)\mathrm{D} f(a) + f(a)\mathrm{D} g(a) .$$

3. *Když $g(a) \neq 0$, je i podílová funkce f/g diferencovatelná v a a*

$$\mathrm{D}(f/g)(a) = \frac{1}{g(a)^2}\Big(g(a)\mathrm{D} f(a) - f(a)\mathrm{D} g(a)\Big) .$$

Všimněme si, že výsledný diferenciál je vždy lineární kombinace diferenciálů funkcí f a g.

Důkaz. Tyto vzorce plynou z analogických vzorců pro parciální derivace a z vyjádření diferenciálu pomocí parciálních derivací. □

Vzorec pro diferenciál lineární kombinace v části 1 platí obecněji i pro zobrazení $f, g : U \to \mathbb{R}^n$.

Zobecníme vzorec pro derivaci složené funkce na obecný případ skládání zobrazení. V následující větě budeme skládání funkcí a zobrazení zapisovat v pořadí zprava doleva podle pořadí aplikace: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Věta (diferenciál složeného zobrazení). *Nechť*

$$f : U \to V, \; g : V \to \mathbb{R}^k$$

jsou dvě zobrazení, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí bodu a a $V \subset \mathbb{R}^n$ je okolí bodu $b = f(a)$. Je-li zobrazení f diferencovatelné v a a g je diferencovatelné v b, je složené zobrazení

$$g \circ f = g(f) : U \to \mathbb{R}^k$$

diferencovatelné v a a jeho diferenciál se rovná složenině diferenciálů zobrazení f a g:

$$\mathrm{D}(g \circ f)(a) = \mathrm{D}g(b) \circ \mathrm{D}f(a) .$$

Než se pustíme do důkazu, připomeneme význam symbolů $o(h)$ a $O(h)$ a explicitně uvedeme jejich jednoduché vlastnosti, které v důkazu využijeme.

Pro zobrazení $z : U \to \mathbb{R}^n$, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí počátku, budeme psát stručně $z(x) = o(x)$ místo $\|z(x)\| = o(\|x\|)$ a $z(x) = O(x)$ místo $\|z(x)\| = O(\|x\|)$, vždy $x \to \overline{0}$. Připomeňme si, že značení $z(x) = o(x)$ je zkratka pro

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \|x\| < \delta \Rightarrow \|z(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$$

(to jest $\|z(x)\| / \|x\| \to 0$ pro $x \to \overline{0}$) a $z(x) = O(x)$ je zkratka pro

$$\exists c > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \|x\| < \delta \Rightarrow \|z(x)\| \leq c \|x\|$$

(to jest podíl $\|z(x)\| / \|x\|$ je v prstencovém okolí $\overline{0}$ omezený).

Lemma. *Nechť $z_1, z_2 : U \to \mathbb{R}^n$, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí počátku, jsou dvě zobrazení. Nechť $u : U \to V$ a $v : V \to \mathbb{R}^k$ jsou dvě zobrazení, přičemž $U \subset \mathbb{R}^m$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ jsou okolí počátků souřadnic. V následujících tvrzeních $x \to \overline{0}$.*

1. *Když je z_1 lineární zobrazení, potom $z_1(x) = O(x)$.*
2. *Když $z_1(x) = o(x)$ a $z_2(x) = o(x)$, potom $z_1(x) + z_2(x) = o(x)$.*
3. *Když $z_1(x) = o(x)$ a $z_2(x) = O(x)$, potom $z_1(x) + z_2(x) = O(x)$.*
4. *Pokud $u(x) = o(x)$ a $v = O(x)$, pak $v(u(x)) = o(x)$.*
5. *Pokud $u(x) = O(x)$ a $v(x) = o(x)$, pak $v(u(x)) = o(x)$.*

Důkaz. Cvičení. $\square$

Důkaz věty. V okolí počátků souřadnic máme aproximace

$$g(b+h) = g(b) + \mathrm{D}g(b)(h) + \gamma(h) \quad \text{a} \quad f(a+h) = f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + \beta(h)\ ,$$

kde $\gamma(h) = o(h)$ a $\beta(h) = o(h)$. Rozdíl $f(a+h) - f(a)$ si označíme jako $\Delta(h)$. Pak $f(a+h) = f(a) + \Delta(h) = b + \Delta(h)$ a $\Delta(h) = \mathrm{D}f(a)(h) + \beta(h)$. Takže

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) &= g(f(a+h)) - g(f(a)) \\
(\text{diferencovatelnost } f \text{ v } a) &= g(b+\Delta(h)) - g(b) \\
(\text{diferencovatelnost } g \text{ v } b) &= \mathrm{D}g(b)(\Delta(h)) + \gamma(\Delta(h)) \\
(\text{linearita } \mathrm{D}g) &= \mathrm{D}g(b)(\mathrm{D}f(a)(h)) + \mathrm{D}g(b)(\beta(h)) + \gamma(\Delta(h)) \\
&= (\mathrm{D}g(b)\circ \mathrm{D}f(a))(h) + \alpha(h)\ ,
\end{aligned}$$

kde

$$\alpha(h) = \mathrm{D}g(b)(\beta(h)) + \gamma(\Delta(h)) = \mathrm{D}g(b)(\beta(h)) + \gamma(\mathrm{D}f(a)(h) + \beta(h))\ .$$

Zbývá ukázat, že pro $h \to \overline{0}$ je $\alpha(h) = o(h)$. První sčítanec ve vyjádření $\alpha(h)$ je $o(h)$ podle částí 1 a 4 lemmatu (lineární, tedy O, zobrazení složené s o dává o) a druhý je rovněž $o(h)$ podle částí 1, 3 a 5 (o zobrazení složené se součtem O a o je o složené s O a tedy o). Celkem $\alpha(h) = o(h)$ podle části 2. Takže $g\circ f$ má v a diferenciál rovný lineárnímu zobrazení $\mathrm{D}g(b)\circ \mathrm{D}f(a)$. $\square$