Přednáška 5, 2. listopadu 2015

Pro dokončení důkazu Banachovy věty o pevném bodu ještě zbývá dokázat cauchyovskost posloupnosti iterací kontrahujícího zobrazení $f:\ M \to M$ metrického prostoru (M,d) do sebe. Nechť je tedy $(x_n) \subset M$, $n = 0, 1, \ldots$, daná rekurencí $x_{n+1} = f(x_n)$. Snadno vidíme, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ je

$$d(x_m, x_{m+1}) \le cd(x_{m-1}, x_m) \le \cdots \le c^m d(x_0, x_1),\ \ c \in (0,1)\ .$$

Takže pro $0 \le m < n$ je podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\le d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\le (c^m + c^{m+1} + \cdots + c^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &\le \frac{c^m d(x_0, x_1)}{1-c} \to 0,\ \ m \to \infty \end{aligned}$$

— (x_n) je Cauchyova. □

Příklad. *Množina spojitých funkcí $f:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ s integrální metrikou není úplný MP.*

Pro $n = 2, 3, \ldots$ definujeme $f_n(x)$ jako 1 na $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, jako -1 na $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ a lineárně to propojíme na $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$. Všechny f_n pak jsou spojité a tvoří Cauchyovu posloupnost, protože pro $2 \le m < n$ máme

$$\int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|\ dt = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |f_m(t) - f_n(t)|\ dt \le \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} 1\ dt = \frac{2}{m}\ .$$

Není těžké vidět, že když je $f:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ spojitá a pro nějaký bod $a \in [0, \frac{1}{2})$ je $f(a) \ne 1$, pak existuje $\delta > 0$, že pro každé velké n je $d(f, f_n) > \delta$ ($d(\cdot,\cdot)$ označuje integrální metriku). Totéž, když $f(a) \ne -1$ pro nějaky bod $a \in (\frac{1}{2}, 1]$. Jako limita funkcí f_n v našem MP s integrální metrikou tak přichází v úvahu jedině funkce, jež je na $[0, \frac{1}{2})$ konstantně 1 a na $(\frac{1}{2}, 1]$ konstantně -1. Bez ohledu na hodnotu v $\frac{1}{2}$ není v tomto bodě spojitá, takže v našem prostoru $\lim f_n$ neexistuje a není úplný. □

Tvrzení (úplný prostor omezených funkcí). *Je-li M libovolná množina, pak metrický prostor omezených funkcí $f:\ M \to \mathbb{R}$ se supremovou metrikou je úplný.*

Důkaz. Nechť (f_n), $f_n : M \to \mathbb{R}$, je posloupnost funkcí, která je cauchyovská (vzhledem k supremové metrice): pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že pro každé $m, n \geq n_0$ a každé $a \in M$ máme nerovnost $|f_m(a) - f_n(a)| < \varepsilon$. Speciálně je pro každý pevný bod $a \in M$ posloupnost reálných čísel $(f_n(a))$ cauchyovská. Má tedy limitu (euklidovský prostor $\mathbb{R}$ je, jak již z MAI víme, úplný), již označíme $f(a)$. Tak dostáváme funkci $f : M \to \mathbb{R}$, která je v popsaném smyslu bodovou limitou posloupnosti funkcí (f_n). Ukážeme, že $f = \lim f_n$ v supremové metrice (z toho už snadno plyne, že f je omezená funkce). Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme index n_0, pro který nerovnost z cauchyovskosti (f_n) platí s $\varepsilon/2$. Nepřítel nám nyní ještě dal prvek $a \in M$. My vezmeme tak velký index m, že $m \geq n_0$ a navíc $|f(a) - f_m(a)| < \varepsilon/2$ (což lze, protože $(f_n(a))$ konverguje k $f(a)$). Pro každé $n \geq n_0$ pak je

$$|f(a) - f_n(a)| \leq |f(a) - f_m(a)| + |f_m(a) - f_n(a)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(první $|\ldots| < \varepsilon/2$ díky volbě m a druhá $|\ldots| < \varepsilon/2$ díky cauchyovskosti (f_n)). Zdůrazněme, že index n_0 závisí jen na ε a ne na prvku a, takže pro každé $n \geq n_0$ a každý prvek $a \in M$ máme $|f(a) - f_n(a)| < \varepsilon$. Tedy pro každé $n \geq n_0$ máme $d(f, f_n) \leq \varepsilon$ v supremové metrice a f je v ní limitou posloupnosti (f_n). □

Věta (úplný prostor omezených spojitých funkcí). *Je-li (M, d) libovolný metrický prostor, pak metrický prostor omezených a spojitých funkcí $f : M \to \mathbb{R}$ se supremovou metrikou je úplný.*

Důkaz. Nechť (f_n) je posloupnost spojitých a omezených reálných funkcí definovaných na M, která je cauchyovská v supremové metrice. Podle předešlého tvrzení existuje omezená funkce $f : M \to \mathbb{R}$, že $\lim f_n = f$. Zbývá jen dokázat, že f je spojitá. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a bod $a \in M$. Vezmeme tak velký index m, že pro každé $x \in M$ je $|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$ (což lze, protože f_n v supremové metrice limití k f). Protože je f_m spojitá, existuje $\delta > 0$ tak, že $x \in B(a, \delta) \Rightarrow |f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon/2$. Pro každý bod $x \in B(a, \delta)$ pak máme

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(první $|\ldots| < \varepsilon/2$ díky blízkosti f_m a f v supremové metrice a druhá $|\ldots| < \varepsilon/2$ díky spojitosti f_m v bodě a). Ukázali jsme, že f je v bodě a spojitá, což platí pro každý bod prostoru M. □

Důsledek ($(\mathcal{C}[a, b], \sup)$ je úplný). *Metrický prostor $\mathcal{C}[a, b]$ funkcí spojitých na $[a, b]$ se supremovou metrikou je úplný.*

Důkaz. Je to speciální případ předešlé věty, když si uvědomíme, že funkce spojitá na intervalu $[a, b]$ už je na něm automaticky omezená. □

Jako příklad aplikace Banachovy věty o pevném bodu a úplných metrických prostorů uvedeme jednu existenční větu o diferenciálních rovnicích.

Věta (Picardova o diferenciální rovnici). *Buď dána otevřená množina $D \subset \mathbb{R}^2$, bod $(a, b) \in D$ a spojitá funkce $f : D \to \mathbb{R}$, pro niž existuje konstanta $c > 0$ tak, že pro každé dva body $(u, v), (u, w) \in D$ je $|f(u, v) - f(u, w)| \le c|v - w|$ (f na D splňuje ve druhé proměnné tzv. Lipschitzovu podmínku). Pak existuje $\delta > 0$ a právě jedna funkce $y : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$, že (i) $y(a) = b$ a (ii) y má na $(a - \delta, a + \delta)$ derivaci a*

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

pro každé $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Důkaz. Podrobně dělat nebudeme. Viz zápis z přednášky před dvěma lety. Je to aplikace BVOPB na úplný metrický prostor $\mathcal{C}[a - \delta, a + \delta]$ se supremovou metrikou. □

Kapitola 2. Posloupnosti a řady funkcí.

V dalším jsou $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, reálné funkce jedné reálné proměnné definované na (neprázdné) množině $M \subset \mathbb{R}$. Co to znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \text{popřípadě} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \text{ ?}$$

Zavedeme tři druhy konvergence posloupností a řad funkcí. Začneme posloupnostmi a k řadám se dostaneme později.

- **bodová konvergence.** Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) *bodově konverguje* k funkci f na množině M, symbolicky

  $$f_n \to f \text{ na } M ,$$

  když pro každé $x \in M$ máme rovnost $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Explicitně,

  $$\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in M\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \,.$$

- **stejnoměrná konvergence.** Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) *stejnoměrně konverguje* k funkci f na množině M, symbolicky

  $$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \ ,$$

  když

  $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ n > n_0, \ x \in M \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

- **lokálně stejnoměrná konvergence.** Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) *lokálně stejnoměrně konverguje* k funkci f na množině M, symbolicky

  $$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } M \ ,$$

  když každé $x \in M$ má okolí $U = (x - \delta, x + \delta)$, kde $\delta > 0$ může záviset na x, že $f_n \rightrightarrows f$ na $M \cap U$.

Je podstatný rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí. V bodové konvergenci pro dané $\varepsilon > 0$ může n_0 záviset na bodu x, v němž konvergenci posloupnosti funkčních hodnot $(f_n(x))$ uvažujeme. Ve stejnoměrné konvergenci však pro dané $\varepsilon > 0$ index n_0 na x záviset nesmí, jediné n_0 musí fungovat pro všechny body $x \in M$.

Nejsilnější z těchto pojmů je stejnoměrná konvergence, lokálně stejnoměrná konvergence je prostřední a bodová konvergence je nejslabší: z definic plyne, že

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \ \Rightarrow \ f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } M \ \Rightarrow \ f_n \to f \text{ na } M \ .$$

Stejnoměrná konvergence je víceméně konvergence v supremové metrice: $f_n \rightrightarrows f$ na $M \iff \lim d(f_n, f) = 0$, kde $d(\cdot,\cdot)$ je supremová metrika na množině funkce reálných funkcí definovaných na množině M. „Víceméně“ proto, že teď, narozdíl od definice metriky, povolujeme i neomezené funkce a tedy můžme dostat i vzdálenost $+\infty$.

Příklady. 1. Nechť $M = [0, 1]$ a $f_n = x^n$. Posloupnost funkcí (f_n) konverguje na intervalu $[0, 1]$ bodově k funkci f dané předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, 1) \ , \\ 1 & \text{pro } x = 1 \ . \end{cases}$$

Je to stejnoměrná konvergence? Není. Položíme $a_n = 1 - 1/n \in M$. Pak

$$f_n(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to 1/e,\ n \to \infty\ .$$

Pro každé n jsme nalezli v množině M „špatný“ bod a_n splňující pro každé $n > n_0$, že

$$|f_n(a_n) - f(a_n)| = f_n(a_n) > 1/2e > 1/6\ ,$$

což vylučuje stejnoměrnou konvergenci. Konvergence není ani lokálně stejnoměrná. Body a_n zleva limití k 1, a tento bod tak nemá okolí U, na němž by $f_n \rightrightarrows f$.

Jiné zdůvodnění, proč zde konvergence není stejnoměrná, je následující. Na minulé přednášce jsme fakticky dokázali, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je opět spojitá funkce. Zde ovšem limitní funkce f není na M spojitá (není spojitá v bodě 1), ačkoli každá funkce f_n spojitá je. Takže konvergence není stejnoměrná.

Jak se konvergence této posloupnosti funkcí změní, když interval $M = [0,1]$ zmenšíme, třeba na $M = [0, 1-\delta]$ pro pevné $\delta > 0$? Pro každé $x \in [0, 1-\delta]$ máme $0 \le f_n(x) = x^n \le (1-\delta)^n$. Protože $(1-\delta)^n \to 0$ pro $n \to \infty$, dostáváme horní odhad $|f_n(x) - f(x)|$, který jde k nule pro $n \to \infty$ a nezávisí na $x \in [0, 1-\delta]$. Takže

$$f_n \rightrightarrows f \ \text{ na } \ M = [0, 1-\delta]\ .$$

Pro $M = [0, 1)$ konvergence stejnoměrná není, kvůli bodům a_n, ale je lokálně stejnoměrná, protože každý bod $a \in [0, 1)$ je obsažen v intervalu typu $M = [0, 1-\delta]$ s $\delta > 0$, totiž v $[0, a]$.

2. Posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

na množině $M = \mathbb{R}$ bodově konverguje k identicky nulové funkci $f \equiv 0$. Špatné body $a_n = 1/n$, v nichž $f_n(a_n) = f_n(1/n) = 1/2$, jdou v limitě k nule. Konvergence není proto ani lokálně stejnoměrná. Je lokálně stejnoměrná na každé množině M, která neobsahuje nulu. Rozmyslete si, že na každé množině $M \subset \mathbb{R}$, která neobsahuje nějaké okolí nuly, je konvergence stejnoměrná.

3. Platí, že

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \rightrightarrows 0 \ \text{ na } M = \mathbb{R}\ ,$$

protože $|f_n(x)| \leq 1/n$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Pro funkci $f : M \to \mathbb{R}$ definujeme označení

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in M} |f(x)|$$

— „el-nekonečno norma". Hodnota normy může být i $+\infty$. Z definice plyne, že $\|cf\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty$ pro každou konstantu $c \in \mathbb{R}$ a že platí trojúhelníková nerovnost $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Z definice stejnoměrné spojitosti a z předchozích příkladů by mělo být jasné, že

$$f_n \rightrightarrows f \ \text{ na } \ M \iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \ .$$

Tvrzení (stejnoměrná Bolzanova–Cauchyova podmínka). *Posloupnost funkcí (f_n) konverguje na množině M stejnoměrně k nějaké funkci f, právě když je splněna podmínka*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ m, n > n_0, \ x \in M \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ .$$

Říkáme jí (stejnoměrná) Bolzanova–Cauchyova podmínka.

Úlohy

1. Jaké řešení má na $\mathbb{R}$ diferenciální rovnice $y' = y$?

2. Jak se přepíše rovnice (a počáteční podmínka) v Picardově větě, aby byla ve tvaru $y = F(y)$, kde F je nějaký operátor (funkce na funkcích) a na F tak šla použít BVOPB?

3. Dokažte, že když $f_n \to f$ na konečné množině M, pak $f_n \rightrightarrows f$ na M.

4. Uveďte příklad takové posloupnosti funkcí $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ spojitých na $[0,1]$, že $f_n \to f$ na $[0,1]$, $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0,1]$ a f je na $[0,1]$ spojitá.

5. Nechť $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ na M. Rozhodněte, zda $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ na M.

6. Nechť $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$ na M. Rozhodněte, zda $f_n g_n \rightrightarrows fg$ na M.

7. Určete, na jakých intervalech (či podmnožinách) definičních oborů konvergují bodově, stejnoměrně, lokálně stejnoměrně následující posloupnosti funkcí. Jaké jsou limitní funkce?

   (a) $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, definiční obor je $\mathbb{R}$.
   (b) $f_n(x) = x^n - x^{3n}$, definiční obor je $[0, 1]$.
   (c) $f_n(x) = x^{n+1} - x^{n-1}$, definiční obor je $[0, 1]$.
   (d) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, definiční obor je $\mathbb{R}$.
   (e) $f_n(x) = nx(1 - x)^n$, definiční obor je $[0, 1]$.
   (f) $f_n(x) = \exp(-n^2x^2)$, definiční obor je $\mathbb{R}$.
   (g) $f_n(x) = \exp(-x^2/n)$, definiční obor je $\mathbb{R}$.