

Přednáška 5, 20. března 2015

Věta (1. základní věta analýzy). *Nechť $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a funkce $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je definována předpisem*

$$F(x) = \int_a^x f .$$

Potom (i) F je na $[a, b]$ spojitá a (ii) v každém bodě spojitosti $x_0 \in [a, b]$ funkce f existuje vlastní $F'(x_0)$ a $F'(x_0) = f(x_0)$ (platí to jednostranně, pokud $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$).

Důkaz. Nechť $c > 0$ je horní mez pro hodnoty $|f(x)|$, $a \leq x \leq b$ (f je integrovatelná a tedy omezená). Pro každé dva body $x, x_0 \in [a, b]$ máme

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \leq |x - x_0|c ,$$

podle definice F , linearity \int v integračních mezích a odhadu \int horní sumou pro dělení (x_0, x) či (x, x_0) interválu s krajními body x a x_0 . Pro $x \rightarrow x_0$ máme $F(x) \rightarrow F(x_0)$ a F je v x_0 spojitá.

Nechť $x_0 \in [a, b]$ je bod spojitosti f . Pro dané $\varepsilon > 0$ máme $\delta > 0$, že $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, jakmile $|x - x_0| < \delta$. Pro $0 < x - x_0 < \delta$ tedy

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon ,$$

podle triviálního odhadu $\int_{x_0}^x f$ dolní a horní sumou pro dělení (x_0, x) . Pro $-\delta < x - x_0 < 0$ platí tytéž nerovnosti (v čitateli i jmenovateli zlomku se změni znaménko). Pro $x \rightarrow x_0$, $x \neq x_0$, tak máme $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f(x_0)$, čili $F'(x_0) = f(x_0)$. \square

Vyřídíme rest z 1. přednášky.

Důsledek (spojitá funkce má primitivní funkci). *Je-li $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na $[a, b]$ spojitá, potom má na $[a, b]$ primitivní funkci F .*

Důkaz. Stačí použít předchozí větu a položit $F(x) = \int_a^x f$. \square

Věta (2. základní věta analýzy). Pokud $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b]$ primitivní k f , pak

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) .$$

Důkaz. Nechť $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ je libovolné dělení intervalu $[a, b]$. Použijeme-li na každý interval $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ a funkci F Lagrangeovu větu o střední hodnotě, dostaneme vztah

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{k-1} (F(a_{i+1}) - F(a_i)) = \sum_{i=0}^{k-1} f(b_i)(a_{i+1} - a_i) ,$$

pro nějaké mezibody $a_i < b_i < a_{i+1}$ (neboť $F'(b_i) = f(b_i)$). Tedy (neboť $\inf_{I_i} f \leq f(b_i) \leq \sup_{I_i} f$)

$$s(f, D) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, D) .$$

Odtud a z integrovatelnosti f ihned plyne, že $F(b) - F(a) = \int_a^b f$. \square

Pro funkci $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se rozdíl jejích hodnot v krajních bodech často značí jako

$$F|_a^b := F(b) - F(a) .$$

Předchozí výsledky shrneme.

Důsledek (∫ pomocí primitivní funkce). Je-li $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na $[a, b]$ spojitá, potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$, f má na $[a, b]$ primitivní funkci F a pro tuto i všechny ostatní primitivní funkce je

$$\int_a^b f = F|_a^b = F(b) - F(a) .$$

Newtonův integrál. Staletí předtím, než přišel Riemann (po jistých pokusech Cauchyho) s přesnou definicí integrálu, počítali matematici integrály bez zábran přímo z primitivních funkcí tzv. *Newtonovým integrálem*. Připomeneme ho a porovnáme s integrálem Riemannovým.¹

¹Zájemcům o historii a další druhy integrálů doporučujeme knihu Š. Schwabik a P. Šarmanová, *Malý průvodce historií integrálu*, Prometheus, 1996.

Nechť $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f má na (a, b) primitivní funkci F a ta má v krajních bodech vlastní jednostranné limity $F(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ a $F(b^-) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$. Newtonův integrál funkce f na (a, b) pak definujeme jako

$$(N) \int_a^b f = F(b^-) - F(a^+).$$

Protože různé primitivní funkce k f se liší jen posunem o konstantu, nezávisí tento rozdíl na volbě F a definice je korektní. Množinu funkcí newtonovsky integrovatelných na (a, b) označíme jako $\mathcal{N}(a, b)$. Jako $\mathcal{C}(a, b)$ označíme množinu funkcí spojitých na $[a, b]$.

Tvrzení (porovnání Newtonova a Riemannova \int). *Máme*

$$\mathcal{C}(a, b) \subset \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{R}(a, b).$$

Pokud $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{R}(a, b)$, pak

$$(N) \int_a^b f = (R) \int_a^b f.$$

Množina $\mathcal{N}(a, b) \setminus \mathcal{R}(a, b)$ i $\mathcal{R}(a, b) \setminus \mathcal{N}(a, b)$ je neprázdná: existují funkce, které mají Newtonův integrál, ale ne Riemannův, i naopak.

Důkaz. Je-li f na $[a, b]$ spojitá, je (jak jsme pomocí stejnoměrné spojitosti dokázali) $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a (podle 1. ZVA) $F(x) = \int_a^x f$ je na $[a, b]$ primitivní k f . Máme $F(a^+) = F(a) = 0$ a $F(b^-) = F(b) = \int_a^b f$, takže i $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Nechť $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{R}(a, b)$. Protože $f \in \mathcal{N}(a, b)$, má na (a, b) primitivní funkci F a existují jednostranné vlastní limity $F(a^+)$ a $F(b^-)$. Protože $f \in \mathcal{R}(a, b)$, je pro každé $\delta > 0$ i $f \in \mathcal{R}(a + \delta, b - \delta)$ a podle 2. ZVA máme

$$(R) \int_{a+\delta}^{b-\delta} f = F(b - \delta) - F(a + \delta).$$

Pro $\delta \rightarrow 0^+$ jde levá strana k $(R) \int_a^b f$ (f je na $[a, b]$ omezená, takže integrály f přes $[a, a + \delta]$ a $[b - \delta, b]$ jdou k 0) a pravá strana jde k $F(b^-) - F(a^+) = (N) \int_a^b f$.

Funkce $f(x) = x^{-1/2} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 2013$, má na $(0, 1)$ Newtonův integrál: $F(x) = 2x^{1/2}$ je tam k ní primitivní, $F(0^+) = 0$ a $F(1^-) = 2$, takže $(N) \int_0^1 f = 2$. Tato funkce ale není na $[0, 1]$ omezená, a proto $f \notin \mathcal{R}(0, 1)$.

Funkce znaménka $\operatorname{sgn}(x)$ je na $[-1, 1]$ neklesající a tedy má na $[-1, 1]$ Riemannův integrál. Na $(-1, 1)$ ale nemá Newtonův integrál — jak jsme ukázali v 1. přednášce, nemá na $(-1, 1)$ primitivní funkci. \square

K závěrečným příkladům poznamenejme, že nicméně

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} (R) \int_{\delta}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2,$$

čili útvar vymezený grafem $y = 1/\sqrt{x}$ a intervalem $(0, 1]$ má plochu 2, a že i když nemůžeme spočítat

$$(R) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) dx$$

okamžitě přímo pomocí 2. ZVA (protože primitivní funkce na daném intervalu neexistuje), po rozkladu $[-1, 1] = [-1, 0] \cup [0, 1]$ už můžeme počítat pomocí primitivních funkcí:

$$\begin{aligned} (R) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) dx &= (R) \int_{-1}^0 \operatorname{sgn}(x) dx + (R) \int_0^1 \operatorname{sgn}(x) dx \\ &= (R) \int_{-1}^0 (-1) dx + (R) \int_0^1 1 dx \\ &= (-x)|_{-1}^0 + x|_0^1 = (-1) + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ve výpočtu jsme změnilí hodnotu funkce $\operatorname{sgn}(x)$ v $x = 0$, ale to nemá na integrovatelnost a hodnotu integrálu žádný vliv).

V dalším už budeme integrálem opět rozumět výhradně Riemannův integrál a místo $(R) \int$ psát pouze \int . Dvě metody výpočtu primitivní funkce, per partes a substituční, se díky 2. ZVA odrážejí i ve výpočtech R. integrálů.

Tvrzení (integrace per partes). *Nechť $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mají na $[a, b]$ spojitě derivace f' a g' . Potom*

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g.$$

Důkaz. Cvičení. \square

Tvrzení (integrace substitucí). *Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, přičemž φ má na $[\alpha, \beta]$ spojitou φ' a $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ nebo $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$.*

1. *Je-li f spojitá na $[a, b]$, pak*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \begin{cases} \int_a^b f & \text{nebo} \\ \int_b^a f = -\int_a^b f. \end{cases}$$

2. *Je-li φ na $[\alpha, \beta]$ rostoucí nebo klesající a $f \in \mathcal{R}(a, b)$, platí opět předchozí rovnost integrálů.*

Důkaz. 1. Funkce f je na $[a, b]$ spojitá a má tam tedy primitivní funkci F . Derivace složené funkce dává na $[\alpha, \beta]$ rovnost $F(\varphi)' = f(\varphi)\varphi'$. Takže $F(\varphi)$ je na $[\alpha, \beta]$ primitivní k $f(\varphi)\varphi'$. Funkce $f(\varphi)\varphi'$ je na $[\alpha, \beta]$ spojitá (je součinem spojitých funkcí), takže $f(\varphi)\varphi' \in \mathcal{R}(\alpha, \beta)$. Dvojím užitím 2. ZVA (v první a třetí rovnosti) máme

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\varphi' = F(\varphi)|_{\alpha}^{\beta} = F|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

2. Ponecháme z časových důvodů bez důkazu. □

Aplikace integrálů. Odhadneme tzv. *harmonická čísla* H_n ,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Pro funkci $f(x) = 1/x : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ a dělení $D = (1, 2, \dots, n+1)$ intervalu $[1, n+1]$ zřejmě máme

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{1}{i+1} = H_{n+1} - 1 \quad \text{a} \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{1}{i} = H_n.$$

Protože $s(f, D) < \int_1^{n+1} 1/x = \log(n+1) < S(f, D)$, pro $n \geq 2$ dostáváme odhad

$$\log(n+1) < H_n < 1 + \log n.$$

Cvičení: dokažte, že pro $n \geq 2$ nikdy H_n není celé číslo.

Podobně *faktoriál* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$: pro funkci $f(x) = \log x : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ a dělení $D = (1, 2, \dots, n+1)$ intervalu $[1, n+1]$ zřejmě máme

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \log i = \log(n!) \quad \text{a} \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \log(i+1) = \log((n+1)!).$$

Protože $s(f, D) < \int_1^{n+1} \log x = (n+1) \log(n+1) - (n+1) + 1 < S(f, D)$, pro $n \geq 2$ dostáváme odhad

$$n \log n - n + 1 < \log(n!) < (n+1) \log(n+1) - n$$

a tedy

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$