

Přednáška 4, 13. března 2015

Tvrzení (monotonie \Rightarrow integrovatelnost). Je-li funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ nerostoucí nebo neklesající, potom má Riemannův integrál.

Důkaz. Nechť f neklesá (pro nerostoucí f se argumentuje podobně). Pro každý podinterval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ pak máme $\inf_{[\alpha, \beta]} f = f(\alpha)$ a $\sup_{[\alpha, \beta]} f = f(\beta)$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme libovolné dělení $D = (a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ intervalu $[a, b]$ s $\lambda(D) < \varepsilon$ a máme

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) (\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\ &= \varepsilon (f(a_k) - f(a_0)) = \varepsilon (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Tuto mez lze zmenšováním ε učinit libovolně malou. Podle kritéria integrovatelnosti tedy $f \in \mathcal{R}(a, b)$. (Kontrolní otázka: proč v předešlém výpočtu nelze místo \leq psát $<$?) \square

I spojitost postačuje pro integrovatelnost. Musíme se však seznámit s její silnější podobou. Řekneme, že funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, kde I je interval, je *stejněměrně spojitá* (na I), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x, x' \in I, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Požaduje se tedy silněji, aby jediná mez δ fungovala pro všechny dvojice bodů x, x' z I . V obyčejné spojitosti může δ záviset na poloze x a x' . Stejněměrná spojitost implikuje triviálně spojitost, ale naopak to obecně neplatí. Například funkce

$$f(x) = 1/x : I = (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

je na I spojitá, ale ne stejněměrně spojitá: $f(1/(n+1)) - f(1/n) = 1$, i když $1/(n+1) - 1/n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. Na *kompaktním intervalu* I , což je interval typu $[a, b]$ s $-\infty < a \leq b < +\infty$, však naštěstí oba typy spojitosti splývají.

Tvrzení (na kompaktu: spojitost \Rightarrow stejnoměrná spojitost). *Je-li funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ spojitá, je na něm stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Pro spor předpokládáme, že $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v každém bodě intervalu $[a, b]$ (tedy jednostraně v krajních bodech a a b), ale že není na $[a, b]$ stejnoměrně spojitá. Odvodíme spor. Negace stejnoměrné spojitosti znamená, že

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, x' \in I : |x - x'| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon .$$

Což znamená, že pro $\delta = 1/n$ a $n = 1, 2, \dots$ existují body $x_n, x'_n \in [a, b]$, že $|x_n - x'_n| < 1/n$, ale $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Díky Bolzanově–Weierstrassově větě ze ZS můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že posloupnosti (x_n) a (x'_n) obě konvergují a (nevyhnutelně) k témuž bodu α z $[a, b]$. (Podle této věty existuje posloupnost přír. čísel $k_1 < k_2 < \dots$, že (x_{k_n}) konverguje. Opět podle této věty existuje posloupnost přír. čísel $l_1 < l_2 < \dots$, že (x'_{l_n}) konverguje. Posloupnost $(x_{k_{l_n}})$ zůstává konvergentní, protože je podposloupností posloupnosti (x_{k_n}) . Protože $|x_{k_{l_n}} - x'_{l_n}| < 1/k_{l_n} \leq 1/n \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_{l_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_{l_n} = \alpha .$$

Abychom se vyhnuli vícenásobným indexům, přeznačíme $x_{k_{l_n}}$ jako x_n a x'_{l_n} jako x'_n .) Podle Heineho definice limity, spojitosti f v bodě α a aritmetiky limit máme

$$0 = f(\alpha) - f(\alpha) = \lim f(x_n) - \lim f(x'_n) = \lim(f(x_n) - f(x'_n)) .$$

Jsme ve sporu s tím, že $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ pro každé n . □

Tvrzení (spojitost \Rightarrow integrovatelnost). *Je-li funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ spojitá, potom má Riemannův integrál.*

Důkaz. Nechť f je na $[a, b]$ spojitá. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle předchozího tvrzení vezmeme $\delta > 0$, že $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ platí, jakmile $x, x' \in [a, b]$ jsou blíže než δ . Tedy

$$\sup_{[\alpha, \beta]} f - \inf_{[\alpha, \beta]} f \leq \varepsilon$$

platí pro každý podinterval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ délky menší než δ (proč?). Vezmeme jakékoli dělení $D = (a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ intervalu $[a, b]$ s $\lambda(D) < \delta$ a máme

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) (\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) \varepsilon \\ &= \varepsilon (a_k - a_0) = \varepsilon (b - a) . \end{aligned}$$

Tuto mez lze zmenšováním ε učinit libovolně malou. Podle kritéria integrovatelnosti tedy $f \in \mathcal{R}(a, b)$. \square

Že monotonie i spojitost postačují k integrovatelnosti jsme dokázali přímo, i když obojí vyplývá hned jako důsledek z Lebesgueovy věty, což si rozmyslete jako cvičení. Zmíníme její další důsledky.

Tvrzení (spojitost(integrovatelnost)=integrovatelnost). *Má-li funkce $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ Riemannův integrál a $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[c, d]$ spojitá, potom má složená funkce $g(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemannův integrál.*

Důkaz. Protože vnější funkce g je omezená, jako spojitá funkce na kompaktním intervalu, je i složená funkce $g(f)$ omezená. Je-li f spojitá v bodě α z $[a, b]$, je i složená funkce $g(f)$ spojitá v α , protože g je spojitá v $f(\alpha)$ a spojitost se skládáním zachovává, jak jsme si dokázali v ZS. Množina M bodů nespojitosti funkce $g(f)$ je tedy obsažena v množině N bodů nespojitosti funkce f . Podle předpokladu a L. věty má N nulovou míru. Takže i M má nulovou míru a podle L. věty má $g(f)$ Riemannův integrál. \square

Proto z $f \in \mathcal{R}(a, b)$ plyne například $f^2 \in \mathcal{R}(a, b)$ nebo $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$. Jako cvičení si rozmyslete, proč a jak z $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ plyne, že i

$$fg \in \mathcal{R}(a, b) \quad \text{a} \quad \max(f, g) \in \mathcal{R}(a, b) .$$

Nyní se podíváme na linearitu R. integrálu. Nejprve ukážeme linearitu $\int_a^b f$ jako funkce integrandu f , a pak jako funkce integračních mezí a a b .

Tvrzení (linearita \int v integrandu). *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ jsou dvě funkce mající R. integrál a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom i*

$$\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(a, b) \quad \text{a} \quad \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g .$$

Důkaz. Stačí prověřit tři speciální případy lineárních kombinací, totiž $-f$, αf s $\alpha \geq 0$ a $f + g$, ostatní se z těchto již odvodí. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle kritéria integrovatelnosti existuje dělení D intervalu $[a, b]$, že

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon \ \& \ S(g, D) - s(g, D) < \varepsilon .$$

(Jistě máme dvě taková dělení, D_1 pro f a D_2 pro g . Přejdem ke společnému zjemnění dosáhneme, že $D_1 = D_2$.) Podle definice infima a suprema množiny reálných čísel, pro libovolný podinterval $I \subset [a, b]$ platí, že (pro $\alpha \geq 0$)

$$\inf_I(-f) = -\sup_I f, \ \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f, \ \inf_I(f + g) \geq \inf_I f + \inf_I g$$

a analogicky pro suprema (prohodíme inf a sup a poslední nerovnost otočíme). Podle definice dolní, popř. horní, sumy jako lineární kombinace ($s > 0$ koeficienty) infim, popř. suprem,

$$S(-f, D) - s(-f, D) = -s(f, D) - (-S(f, D)) = S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon ,$$

$$S(\alpha f, D) - s(\alpha f, D) = \alpha S(f, D) - \alpha s(f, D) \leq \alpha \varepsilon \ (\alpha \geq 0)$$

a

$$\begin{aligned} S(f + g, D) - s(f + g, D) &\leq (S(f, D) + S(g, D)) - (s(f, D) + s(g, D)) \\ &= S(f, D) - s(f, D) + S(g, D) - s(g, D) \\ &< 2\varepsilon . \end{aligned}$$

Takže, podle kritéria integrovatelnosti, i $-f, \alpha f, f + g \in \mathcal{R}(a, b)$. Navíc, podle nerovností mezi dolními a horními sumami a integrálem, $\int_a^b f \in [s(f, D), S(f, D)]$ a totéž platí pro funkci g . Tedy $\int_a^b(-f)$ leží v intervalu

$$[s(-f, D), S(-f, D)] = [-S(f, D), -s(f, D)] \ni -\int_a^b f$$

a čísla $\int_a^b(-f)$ a $-\int_a^b f$ se tak liší o méně než ε . Tedy $\int_a^b(-f) = -\int_a^b f$. Podobně $\int_a^b \alpha f$ leží v intervalu

$$[s(\alpha f, D), S(\alpha f, D)] = [\alpha s(f, D), \alpha S(f, D)] \ni \alpha \int_a^b f$$

o délce nejvýše $\alpha\varepsilon$, a tak $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$. Konečně $\int_a^b (f + g)$ leží v intervalu

$$[s(f+g, D), S(f+g, D)] \subset [s(f, D)+s(g, D), S(f, D)+S(g, D)] \ni \int_a^b f + \int_a^b g$$

o délce méně než 2ε , a tak $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. \square

Podle předchozího tvrzení množina riemannovsky integrovatelných funkcí $\mathcal{R}(a, b)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem \mathbb{R} a $f \mapsto \int_a^b f$ je lineární zobrazení z $\mathcal{R}(a, b)$ do \mathbb{R} . Říkáme, že R. integrál je *lineární funkcional*. Předchozí důkaz linearitě pomocí dolních a horních sum jsem na přednášce z časových důvodů neuváděl a odvolal jsem se na ekvivalenci obou definic R. integrálu, kterou nebudeme dokazovat.

Věta (ekvivalence obou definic R. \int). *Obě definice Riemannova integrálu jsou ekvivalentní: pro každou funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\lim_{\lambda(D) \rightarrow 0} R(f, D, C) \text{ existuje} \iff \int_a^b f = \overline{\int_a^b f} \in \mathbb{R}$$

a obě hodnoty, pokud existují, se rovnají.

Jako cvičení si rozmyslete důkaz tvrzení o linearitě \int v integrandu pomocí první definice R. integrálu.

Přejdeme k linearitě \int jako funkce integračních mezí. Nejprve mírně rozšíříme definici $\int_a^b f$:

$$\int_a^a f := 0 \text{ a } \int_a^b f := - \int_b^a f \text{ pro } a > b.$$

Pro $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a podinterval $I \subset [a, b]$ označíme zúžení funkce f na I v následujícím tvrzení pro jednoduchost opět jako f .

Tvrzení (linearita \int v integračních mezích). *Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce a $c \in (a, b)$. Potom*

$$f \in \mathcal{R}(a, b) \iff f \in \mathcal{R}(a, c) \ \& \ f \in \mathcal{R}(c, b)$$

a, jsou-li tyto integrály definované,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Důkaz. Jako $f_1 : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ a $f_2 : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ označíme zúžení funcce f na uvedený podinterval. Nechť $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ podle kritéria integrovatelnosti máme dělení D intervalu $[a, b]$, že $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$. Můžeme předpokládat (přechodem ke zjemnění), že $c \in D$. Bod c dělí D na dělení D' intervalu $[a, c]$ a dělení D'' intervalu $[c, b]$. Protože $S(f, D) = S(f_1, D') + S(f_2, D'')$ a $s(f, D) = s(f_1, D') + s(f_2, D'')$, z

$$\varepsilon > S(f, D) - s(f, D) = (S(f_1, D') - s(f_1, D')) + (S(f_2, D'') - s(f_2, D''))$$

plyne, díky nezápornosti rozdílu horní a dolní sumy, že i $\varepsilon > S(f_1, D') - s(f_1, D')$ a $\varepsilon > S(f_2, D'') - s(f_2, D'')$. (Obecně samozřejmě z $\gamma > \alpha + \beta$ neplyne, že $\gamma > \alpha$ a $\gamma > \beta$.) Tedy, podle kritéria integrovatelnosti, $f_1 \in \mathcal{R}(a, c)$ a $f_2 \in \mathcal{R}(c, b)$. Máme $\int_a^c f_1 \in [s(f_1, D'), S(f_1, D')]$, $\int_c^b f_2 \in [s(f_2, D''), S(f_2, D'')]$ a $\int_a^b f \in [s(f, D), S(f, D)]$, z čehož plyne, že $\int_a^c f_1 + \int_c^b f_2$ a $\int_a^b f$ se liší o méně než ε . Tedy $\int_a^c f_1 + \int_c^b f_2 = \int_a^b f$.

Nechť $f_1 \in \mathcal{R}(a, c)$ a $f_2 \in \mathcal{R}(c, b)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ podle kritéria integrovatelnosti máme dělení D' intervalu $[a, c]$ a dělení D'' intervalu $[c, b]$, že $S(f_1, D') - s(f_1, D') < \varepsilon$ a $S(f_2, D'') - s(f_2, D'') < \varepsilon$. Sečtením dostaneme

$$2\varepsilon > S(f_1, D') - s(f_1, D') + S(f_2, D'') - s(f_2, D'') = S(f, D) - s(f, D) ,$$

kde D je dělení intervalu $[a, b]$ vzniklé spojením D' a D'' . Tedy, podle kritéria integrovatelnosti, i $f \in \mathcal{R}(a, b)$. \square

Důsledek (∫ přes cyklus je 0). Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $d = \min(a, b, c)$, $e = \max(a, b, c)$ a $f \in \mathcal{R}(d, e)$. Potom následující tři integrály existují a

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0 .$$

Důkaz. Nechť například $d = a < e = c$. Podle předchozího tvrzení máme

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f .$$

Celý součet pak je $\int_a^c f + \int_c^a f = \int_a^c f - \int_a^c f = 0$. Ostatní možnosti jsou podobné. \square