Přednáška 3, 13. března 2014 (část)

Jako první ilustrační příklad k racionálním generujícím funkcím odvodíme explicitní vzorec pro *Fibonacciova čísla*. Ta jsou daná rekurencí $a_0 = a_1 = 1$ a $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Rekurence se pomocí GF $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ lehce přepíše jako $(1 - x - x^2)A(x) = 1$. Takže

$$A(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}\ .$$

Nalezneme konstanty $c, d, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, že

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{d}{1 - \alpha x} + \frac{c}{1 - \beta x}\ . \tag{1}$$

Pišme $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$. Pak $\alpha + \beta = 1$ a $\alpha\beta = -1$, takže α a β jsou kořeny kvadratického polynomu

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - x - 1, \quad \text{a tedy} \quad \alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\ ;$$

řekněme, že α má $+$ a β má $-$. Konstanty c a d nalezneme ze vztahu

$$c(1 - \alpha x) + d(1 - \beta x) = 1\ ; \tag{2}$$

rovnost (1) pak totiž plyne vydělením (2) polynomem $1 - x - x^2$. Tedy $c + d = 1$ a $c\alpha + d\beta = 0$. Řešení této lineární soustavy je

$$c = \frac{1}{1 - \alpha/\beta} = \frac{\beta}{\beta - \alpha} = -\frac{\beta}{\sqrt{5}} \quad \text{a podobně} \quad d = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}\ .$$

Takže

$$A(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{\alpha/\sqrt{5}}{1 - \alpha x} - \frac{\beta/\sqrt{5}}{1 - \beta x}\ .$$

Rozvoje do geometrických řad dávají

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{\alpha/\sqrt{5}}{1 - \alpha x} - \frac{\beta/\sqrt{5}}{1 - \beta x} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n - \frac{\beta}{\sqrt{5}} \sum_{n\geq 0} \beta^n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}} \big(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\big) x^n\ . \end{aligned}$$

A tak

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right),$$

což je hledaný explicitní vzorec pro a_n. Protože $|\beta| < 0.7$, můžeme ho dále zjednodušit na

$$a_n = \left\|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\|,$$

kde $\|\cdot\|$ označuje výsledek zaokrouhlení na nejbližší celé číslo.