

Přednáška 11, 14. prosince 2015

Dokážeme Dirichletovu větu z minulé přednášky. K tomu budeme potřebovat funkci

$$J_n(x) := \frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

zvanou *Dirichletovo jádro*. Lehce se zintegruje přes $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} \langle J_n, 1 \rangle &= (1/2)\langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle + \sum_{k=1}^n \langle \cos kx, \cos(0x) \rangle = \frac{2\pi}{2} + \sum_{k=1}^n 0 \\ &= \pi \end{aligned}$$

— díky linearitě skalárního součinu a ortogonalitě sinů a cosinů. J_n je sudá funkce (jakožto součet sudých funkcí), a tak se integrály přes $[-\pi, 0]$ a $[0, \pi]$ rovnají:

$$\int_{-\pi}^0 J_n = \int_0^{\pi} J_n = \frac{\pi}{2}.$$

Pro $q = e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$, máme $q = \cos x + i \sin x$ a pro $y \in \mathbb{R}$ je $q^y + q^{-y} = 2 \cos(xy)$ a $q^y - q^{-y} = 2i \sin(xy)$ (úloha 8). Tedy

$$\begin{aligned} J_n(x) &= 2^{-1} \sum_{k=-n}^n q^k = \frac{q^{-n}}{2} \sum_{k=0}^{2n} q^k = \frac{q^{n+1} - q^{-n}}{2(q-1)} = \frac{q^{n+1/2} - q^{-n-1/2}}{2(q^{1/2} - q^{-1/2})} \\ &= \frac{\sin((n+1/2)x)}{2 \sin(x/2)}, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(úloha 1). Dokázali jsme tak

Lemma (o Dirichletově jádře). *Funkce $J_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)$ splňuje pro $x \in \mathbb{R}$ vztahy*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_n = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad J_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2 \sin(x/2)}, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Poslední rovnost platí i pro $x = 2k\pi$, vyložíme-li vzniklý neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ jako hodnotu limity v $x = 0$ (na obou stranách rovnosti pak je $n + 1/2$).

Pokračujme v důkazu Dirichletovy věty. Máme po částech hladkou funkci $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$ je pevné. Pak se n -tý částečný součet $s_n(x)$ F. řady funkce f v bodě x rovná

$$\frac{\langle f(t), \cos(0t) \rangle}{2\pi} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\langle f(t), \cos(kt) \rangle}{\pi} \cos(kx) + \frac{\langle f(t), \sin(kt) \rangle}{\pi} \sin(kx) \right).$$

Díky linearitě skalárního součinu a součtovému vzorci pro cosinus ($\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$) je

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \left\langle f(t), \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx)) \right\rangle_t \\ &= \frac{1}{\pi} \left\langle f(t), \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right\rangle_t = \frac{1}{\pi} \langle f(u+x), J_n(u) \rangle_u \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(u+x) J_n(u) du + \int_0^{\pi} f(u+x) J_n(u) du \right) \end{aligned}$$

(ve skalárních součinech se integruje podle proměnné v indexu a $t-x=u$). Označíme

$$f^-(u) = f(u+x) - f(x-0) \quad \text{a} \quad f^+(u) = f(u+x) - f(x+0).$$

První vlastnost J_n v lemmatu dává vyjádření

$$s_n(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f^-(u) J_n(u) du + \int_0^{\pi} f^+(u) J_n(u) du \right).$$

S pomocí vzorce pro J_n v lemmatu oba integrandy přepíšeme ve tvaru $G(u) \sin((n+1/2)u)$, kde definujeme $G(0) = 0$ (na této hodnotě nezáleží),

$$G(u) = \frac{f^-(u)}{2 \sin(u/2)} \quad \text{pro } u \in [-\pi, 0) \quad \text{a} \quad G(u) = \frac{f^+(u)}{2 \sin(u/2)} \quad \text{pro } u \in (0, \pi].$$

Sloučením obou integrálů a použitím součtového vzorce pro sinus ($\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$) pak dostaneme

$$\begin{aligned} s_n(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(u) \sin((n+1/2)u) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\langle G(u) \cos(u/2), \sin(nu) \rangle + \langle G(u) \sin(u/2), \cos(nu) \rangle \right). \end{aligned}$$

Úprava v poslední rovnosti je korektní (úloha 2), když ukážeme, že $G(u)$ má na $[-\pi, \pi]$ Riemannův integrál. Pak ho mají i funkce $G(u) \cos(u/2)$ a $G(u) \sin(u/2)$ (proč? — úloha 3), oba poslední skalární součiny jsou definované a dokonce, podle Riemannova–Lebesgueova lemmatu, pro $n \rightarrow \infty$ jdou k 0. Tedy i

$$s_n(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

což jsme právě chtěli dokázat.

Funkce $G(u)$ má jen konečně mnoho bodů nespojitosti, které jsou obsažené mezi body 0 a $a_i - x$ (kde a_i jsou body dělení pro funkci f). Pro omezenost $G(u)$ je klíčové její chování poblíž $u = 0$, protože tam se jmenovatel $2 \sin(u/2)$ přibližuje libovolně k 0 (a jinde ne). l'Hospitalovo pravidlo (úloha 4) dává

$$\lim_{u \rightarrow 0^-} G(u) = \frac{\lim_{u \rightarrow 0^-} (df^-(u)/du)}{\lim_{u \rightarrow 0^-} \cos(u/2)} = f'(x-0)$$

a podobně $\lim_{u \rightarrow 0^+} G(u) = f'(x+0)$. To jsou podle předpokladu o f vždy vlastní hodnoty, takže $G(u)$ je omezená na okolí 0 a tedy i na celém intervalu $[-\pi, \pi]$. Podle Lebesgueovy věty má proto $G(u)$ na $[-\pi, \pi]$ Riemannův integrál (je omezená a množina bodů nespojitosti má míru nula), viz úlohu 5. Důkaz je dokončen.

Kapitola 3. Úvod do komplexní analýzy.

Komplexní čísla jsou dvojice

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad i^2 = -1.$$

Ve zbytku semestru (dvě přednášky a něco) si vyložíme některé základní výsledky analýzy v komplexním oboru, tj. výsledky o funkcích s komplexními hodnotami a, zejména, komplexní proměnnou. Předpokládáme, že posluchač(ka) ovládá základní aritmetiku komplexních čísel (viz úlohy 6, 7 a 8). Připomeneme jen, že \mathbb{C} je vzhledem ke sčítání a násobení těleso. Dělí se v něm takto:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i.$$

Imaginární jednotka i byla přidána, aby se rovnice $x^2 + 1 = 0$ stala řešitelnou. Tím se ale dosáhlo daleko víc — řešitelná je rázem každá polynomiální rovnice $\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$, $a_k \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ a $a_n \neq 0$, což jsme si i dokázali (Základní věta algebry).

\mathbb{C} je dvourozměrný euklidovský prostor, s metrikou danou normou $\|a + bi\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, tj. ($z_k = a_k + b_k i$, $k = 1, 2$)

$$d(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

Místo $\|z\|$ budeme psát jednodušeji pouze absolutní hodnotu $|z|$. Budeme pracovat s funkcemi typu

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C} \text{ je otevřená.}$$

Derivace takové funkce v bodu $z_0 \in D$ se definuje jako pro funkce reálné proměnné:

$$\mathbb{C} \ni f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Je to tedy (jednoznačně určené, existuje-li) komplexní číslo $f'(z_0)$, které v okolí z_0 dává dobré lineární přiblížení k hodnotám funkce $f(z)$:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0), \quad z \rightarrow z_0,$$

což znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \frac{|f(z) - (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))|}{|z - z_0|} < \varepsilon.$$

Pro komplexní funkce nepřipouštíme nevlastní hodnoty derivací. Má-li f derivaci na nějakém celém okolí bodu z_0 , lze zřejmým způsobem zavést hodnotu druhé derivace $f''(z_0)$ a podobně definujeme hodnoty derivací vyšších řádů.

Definice (holomorfní funkce). Řekneme, že funkce $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, je holomorfní na D , když má v každém bodu $z_0 \in D$ derivaci.

Základní výsledek analýzy v komplexním oboru je

Věta (základní věta o holomorfních funkcích). Funkce $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, buď holomorfní na D . Pak f má na D derivace

všech řádů a je na D lokálně součtem své Taylorovy řady: pro každý bod $z_0 \in D$ existuje okolí $z_0 \in U \subset D$, že pro každé $z \in U$ platí rovnost

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0) \cdot \frac{(z - z_0)^n}{n!}.$$

Důkaz věty se budu snažit v následujících třech přednáškách nastínit. Jak podrobněji prodiskutujeme v příští přednášce, pro reálné funkce zdaleka neplatí.

Úlohy

1. Vysvětlete podrobně odvození vzorce pro Dirichletovo jádro v lemmatu.
2. Proč by tato rovnost mohla být nekorektní, to jest jedna strana by nemusela být definovaná?
3. Proč platí, že když $f \in \mathcal{R}(a, b)$, tak i $f(x) \cos(x/2)$, $f(x) \sin(x/2) \in \mathcal{R}(a, b)$?
4. Připomeňte si předpoklady užití l'Hospitalova pravidla pro výpočet limit a ověřte, že jsou při jeho užití v důkazu Dirichletovy věty splněny.
5. Rozmyslete si, proč je funkce $G(u)$ z důkazu Dirichletovy věty omezená a proč má jen konečně mnoho bodů nespojitosti. Jak to přesně plyne z předpokladů věty?
6. Odvoďte vzorec pro druhou odmocninu z čísla $z \in \mathbb{C}$.
7. Dokažte, že když $z \in \mathbb{C}$ a $|z| = 1$, pak $1/z = \bar{z}$ (kde $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ je komplexní konjugace).
8. Když $\varphi \in \mathbb{R}$, tak, jak je dobře známo, $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Co přesně znamená výraz na levé straně? Je tato rovnost tvrzení nebo spíš definice?