Přednáška 10, 7. prosince 2015

Nejprve dokážeme ortogonalitu sinů a cosinů. Pak uvedeme postačující podmínku pro konvergenci Fourierovy řady funkce a nakonec dokážeme slavný vzorec L. Eulera
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\ .$$

Důkaz. (Ortogonalita sinů a cosinů.) Pro důkaz reálnou integrací viz zápis z přednášky před 2 lety. Nyní použijeme integraci komplexní. Pro $c \in \mathbb{Z}$ buď $I_c = \int_{-\pi}^{\pi}\exp(icx)\,dx$. Pro $c = 0$ zřejmě $I_0 = 2\pi$ a pro $c \neq 0$ je $I_c = [\exp(icx)/ic]_{-\pi}^{\pi} = 0$, protože $\exp(ix) = \cos x + i\sin x$ je 2π-periodická funkce. Pro $m, n \in \mathbb{Z}$ se I_{m+n} na jednu stranu rovná 0 pro $m+n \neq 0$ a 2π pro $m+n = 0$, a na druhou stranu to je i $\int_{-\pi}^{\pi}(\cos mx + i\sin mx)(\cos nx + i\sin nx)\,dx$, tedy
$$\int_{-\pi}^{\pi}(\cos mx\cdot\cos nx - \sin mx\cdot\sin nx) + i\int_{-\pi}^{\pi}(\cos mx\cdot\sin nx + \sin mx\cdot\cos nx)$$
(dx vynecháno, aby se to vešlo). Imaginární část je vždy 0, takže druhý $\int$ se vždy rovná 0. Záměna m za $-m$ změní ve druhém $\int$ znaménko $+$ na $-$ a sečtením obou rovnic máme $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nx\ dx = 0$ pro každé $m, n \in \mathbb{Z}$. Stejná úvaha pro první $\int$ dává i $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\ dx = 0$ a $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\ dx = 0$, když $m \neq \pm n$. Když $m = \pm n \neq 0$, dostaneme z prvního $\int$ dvě rovnice, v nichž na levých stranách jsou znaménka $-$ a $+$ a na pravých 0 a 2π (nebo naopak). Jejich sečtení a odečtení dává $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\ dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\ dx = \pi$ pro nenulové $m \in \mathbb{Z}$. Zbývající případ $m = n = 0$ je triviální ($\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 0x\ dx = 2\pi$ a $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 0x\ dx = 0$). $\square$

Řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[a, b]$ *po částech hladká*, když existuje takové dělení
$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b$$
tohoto intervalu, že f má na každém intervalu (a_i, a_{i+1}) spojitou první derivaci (sama f je tedy na tomto intervalu také spojitá) a v dělících bodech má f vlastní jednostranné limity $f(a_i + 0), f(a_i - 0), f'(a_i + 0), f'(a_i - 0)$. Zde zavádíme označení
$$f(a_i - 0) := \lim_{x\to a^-} f(x)$$

a podobně pro ostatní jednostranné limity. (Stačí předpokládat existenci vlastních limit $f'(a_i+0), f'(a_i-0)$, existence vlastních limit $f(a_i+0), f(a_i-0)$ už plyne Lagrangeovou větou o střední hodnotě.) Snadno se vidí pomocí Lebesgueovy věty, že po částech hladká funkce je riemannnovsky integrovatelná (úloha 1). Pro po částech hladké funkce Fourierova řada bodově konverguje: v bodech spojitosti k funkční hodnotě a v dělících bodech k aritmetickému průměru jednostranných limit.

Věta (Dirichletova, o bodové konvergenci F. řady). *Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je 2π-periodická funkce, jejíž zúžení na interval $[-\pi,\pi]$ je po částech hladké. Pak Fourierova řada funkce $f(x)$ na $\mathbb{R}$ bodově konverguje k funkci*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\ .$$

V každém bodu spojitosti x funkce f tedy její Fourierova řada konverguje k hodnotě $f(x)$.

Důkaz. Příště. □

Jen bodová konvergence Fourierovy řady je slabá vlastnost, protože, jak víme, obecně neumožňuje limitění, derivování a integrování řady člen po členu. Je-li f na $[-\pi,\pi]$ po částech hladká avšak nespojitá v alespoň jednom bodě, její Fourierova řada nekonverguje k $(f(x+0)+f(x-0))/2$ na $[-\pi,\pi]$ stejnoměrně — jinak by funkce $(f(x+0)+f(x-0))/2$ jako stejnoměrný součet spojitých funkcí musela být spojitá, ale to není (úloha 2). Pro po částech hladkou a spojitou funkci její Fourierova řada konverguje stejnoměrně.

Věta (o stejnoměrné konvergenci F. řady). *Nechť funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je 2π-periodická a spojitá a její zúžení na $[-\pi,\pi]$ je po částech hladké. Pak je f na $\mathbb{R}$ stejnoměrným součtem své Fourierovy řady.*

Důkaz. Nebudeme dělat. □

Následující dva příklady jsem na přednášce nestihl přednést, ale ponechávám je tu.

Příklad 1. Rozvineme funkci $f(x)$, definovanou na intervalu $[-\pi,\pi)$ jako $f(x)=x^2$ a 2π-periodicky rozšířenou na $\mathbb{R}$, do Fourierovy řady. Je to sudá funkce, sinové Fourierovy koeficienty b_n jsou proto nulové (integrál liché funkce přes $[-\pi,\pi]$ je nula). Cosinové Fourierovy koeficienty jsou (integrál sudé funkce přes $[-\pi,\pi]$ je dvojnásobek integrálu přes $[0,\pi]$)

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

a, pro $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \overbrace{\cos(nx)}^{(\sin(nx)/n)'}\,dx = \frac{2}{\pi n}\underbrace{\left[x^2\sin(nx)\right]_0^\pi}_{0} - \frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\ \overbrace{\sin(nx)}^{(-\cos(nx)/n)'}\ dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\underbrace{\left[x\cos(nx)\right]_0^\pi}_{\pi(-1)^n} - \frac{4}{\pi n^2}\underbrace{\int_0^\pi \cos(nx)\,dx}_{0} = (-1)^n\frac{4}{n^2}\ . \end{aligned}$$

Protože $f(x)$ ($= x^2$ na $[-\pi,\pi]$) je spojitá a po částech hladká funkce, podle předešlé věty

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2} \rightrightarrows f(x)\ \text{ na } \mathbb{R}\ .$$

Dosazením $x = \pi$ dostáváme

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n^2},\quad \text{tedy}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Podobně pro $x = 0$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

(viz úlohu 9).

Příklad 2. Rozvineme funkci $f(x)$, definovanou na intervalu $[-\pi,\pi)$ jako $f(x) = \pi - x$ a 2π-periodicky rozšířenou na $\mathbb{R}$, do Fourierovy řady. Nultý cosinový F. koeficient je

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(2\pi^2 - [x^2/2]_{-\pi}^{\pi}\right) = 2\pi\ .$$

Další cosinové koeficinty už jsou nulové, protože pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\langle f(x), \cos(nx)\rangle = \pi\langle 1, \cos(nx)\rangle - \langle x, \cos(nx)\rangle = 0 - 0 = 0$$

(první nulu máme podle tvrzení o ortogonalitě sinů a cosinů a druhou protože integrujeme lichou funkci přes $[-\pi, \pi]$). Sinové F. koeficienty pro $n \in \mathbb{N}$ jsou

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Bigg(\underbrace{[(\pi - x)(-1/n)\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi}}_{2\pi(-1)^n/n} - \frac{1}{n}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx}_{0}\Bigg) \\ &= (-1)^n\frac{2}{n}\ . \end{aligned}$$

Daná funkce je po částech hladká, ale v bodech $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je nespojitá. Podle Dirichletovy věty

$$\pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx) \to f(x) \ \text{ na } \mathbb{R}\backslash\{\dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots\}\ .$$

V bodech $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tato Fourierova řada konverguje k hodnotě $(0 + 2\pi)/2 = \pi$, zatímco $f((2k+1)\pi) = 2\pi$. Dosazením $x = \pi/2$ po jednoduchých úpravách dostaneme rovnost

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}\ .$$

Eulerův vzorec, který jsme v prvním příkladu odvodili Fourierovým rozvojem, nyní dokážeme elementárně, bez použití Fourierových řad.

Věta (Eulerův vzorec).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\ ,$$

protože

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x(x - 2\pi)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(x/2)}\,dx \to 0,\ n \to \infty\ .$$

Důkaz. Nejprve odvodíme identitu pro zbytek řady a pak dokážeme konvergenci k 0. Z $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, a vlastností exponenciály máme

$$\begin{aligned}
1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=-n}^{n} \exp(ikx) &= \exp(-inx)\frac{\exp(i(2n+1)x) - 1}{\exp(ix) - 1} \\
&= \frac{\exp(i(n+\frac{1}{2})x) - \exp(-i(n+\frac{1}{2})x)}{\exp(ix/2) - \exp(-ix/2)} \\
&= \frac{2i\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2i\sin(x/2)}\ ,
\end{aligned}$$

a tak

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(x/2)},\ x \in \mathbb{R}\ ,$$

kde pro $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, je zlomek $\frac{0}{0}$ definován svou limitní hodnotou. Spočteme integrály $I_k = \int_0^\pi x\cos(kx)\,dx$ a $J_k = \int_0^\pi x^2\cos(kx)\,dx$, $k \in \mathbb{N}$ (druhý jsme už počítali). Integrace per partes dává

$$\begin{aligned}
I_k &= [x\sin(kx)/k]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kx)\,dx = \left[\cos(kx)/k^2\right]_0^\pi \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \quad \text{a} \\
J_k &= \left[x^2\sin(kx)/k\right]_0^\pi - \frac{2}{k}\int_0^\pi x\sin(kx)\,dx \\
&= \left[2x\cos(kx)/k^2\right]_0^\pi - \frac{2}{k^2}\int_0^\pi \cos(kx)\,dx \\
&= \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}\ .
\end{aligned}$$

Integrál ze znění věty se proto rovná

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \ldots &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (x^2 - 2\pi x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} J_k - 2\pi\sum_{k=1}^{n} I_k \\
&= -\frac{\pi^3}{3} + 2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

and identita je dokázána.

Že pro $n \to \infty$ integrál jde k 0 je vidět z

$$\int_0^\pi x(x-2\pi)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(x/2)}\,dx = \int_0^\pi f(x)\sin((n+1/2)x)\,dx\ ,$$

kde funkce $f(x) = x(x-2\pi)/2\sin(x/2)$ je spojitá na $[0,\pi]$ (v 0 má konečnou limitu). Takže konvergence k 0 plyne z

modifikace Riemannova–Lebesgueova lemmatu. Když je $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, pak

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin((n+1/2)x)\,dx = 0\ .$$

Dokažme to. Je-li $f \equiv c$ konstantní, je

$$\left|\int_a^b \ldots\right| = |c|\cdot\left|\left[\frac{-\cos((n+1/2)x)}{n+1/2}\right]_a^b\right| \le \frac{2|c|}{n+1/2}\ .$$

Obecná f je dokonce stejnoměrně spojitá, protože $[a,b]$ je kompaktní. Pro dané $\varepsilon > 0$ tak existuje $\delta > 0$, že $x,y \in [a,b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Interval $[a,b]$ rozdělíme body $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ na intervalky $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ s délkami $|I_i| = a_{i+1} - a_i < \delta$. Potom pro $x \in I_i$ máme $f(x) = f(a_i) + \Delta_i(x)$, kde $|\Delta_i(x)| < \varepsilon$. Takže

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \ldots\right| &\le \sum_{i=0}^{k-1}\left|\int_{I_i}(f(a_i)+\Delta_i(x))\sin((n+1/2)x)\,dx\right| \\
&\le \sum_{i=0}^{k-1}\left|\int_{I_i} f(a_i)\sin((n+1/2)x)\,dx\right| + \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1}\left|\int_{I_i}\Delta_i(x)\sin((n+1/2)x)\,dx\right| \\
&\le \sum_{i=0}^{k-1}\frac{2|f(a_i)|}{n+1/2} + \sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon|I_i| = \frac{2}{n+1/2}\sum_{i=0}^{k-1}|f(a_i)| + \varepsilon(b-a) \\
&< \varepsilon(b-a+1),\ n > n_0\ .
\end{aligned}$$

Integrál tedy pro $n \to \infty$ jde k 0 a Eulerův vzorec je dokázaný. □

Na přednášce jsem to vykládal zbytečně složitě — rozklad $\sin((n+1/2)x) = \sin(nx)\cos(x/2) + \cos(nx)\sin(x/2)$ není zapotřebí. Tento důkaz Eulerova vzorce jsem si přečetl v preprintu *S. G. Moreno, A one-sentence and truly elementary proof of the Basel problem, ArXiv:1502.07667v1, 2015, 7 stran* (trochu jsem ho upravil a rozepsal). Obsahuje přes 80 odkazů na další důkazy Eulerova vzorce.

Úlohy

1. Dokažte, že po částech hladká funkce je omezená a její body nespojitosti tvoří množinu míry 0 — podle Lebesgueovy věty má Riemannův integrál.

2. Dokažte, že když je $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ po částech hladká a nespojitá, je i $(f(x-0)+f(x+0))/$ nespojitá.

3. Rozviňte funkci $\sin(2x)$ do Fourierovy řady.

4. Vypočtěte
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)^2 \, dx \ .$$

5. Nechť $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má Riemannův integrál na každém intervalu $[a,b]$ a je p-periodická ($p > 0$), tj. pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí, že $f(x) = f(x+p)$. Dokažte, že integrál $\int_a^{a+p} f$ má jedinou hodnotu, nezávislou na a.

6. Nechť $f(x) = |x|$ pro $-\pi \le x \le \pi$ a na zbytek $\mathbb{R}$ je funkce f rozšířena, aby byla 2π-periodická. Nalezněte její Fourierovu řadu a zjistěte, k jakým hodnotám konverguje.

7. $f(x) = 0$ pro $-\pi \le x < 0$, $f(x) = 1$ pro $0 \le x < \pi$ a na zbytek $\mathbb{R}$ je funkce f rozšířena, aby byla 2π-periodická. Nalezněte její Fourierovu řadu a zjistěte, k jakým hodnotám konverguje. Konverguje stejnoměrně?

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} = ? \ \text{ a } \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} = ?$$

9. Odvoďte $\sum(-1)^{n+1}n^{-2} = \pi^2/12$ z $\sum n^{-2} = \pi^2/6$ jednoduchou manipulací s nekonečnými řadami.