# Vícerozměrný Riemannův integrál a Fubiniova věta

(sepsáno podle 11. kapitoly knihy V. A. Zoricha, *Mathematical Analysis II*, Springer, 2004)

**Boxy.** Box, přesněji $n$-rozměrný *box* $I \subset \mathbb{R}^n$, je kartézský součin intervalů

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_2, b_2] ,$$

kde $-\infty < a_i < b_i < +\infty$. Např. v euklidovské rovině $\mathbb{R}^2$ to je uzavřený obdélník se stranami rovnoběžnými s osami souřadnic a s kladnými délkami. *Objem boxu* je

$$|I| := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) .$$

*Dělení $D$ boxu $I$ na podboxy* je množina boxů

$$D = \{[c_1^{j_1}, c_1^{j_1+1}] \times [c_2^{j_2}, c_2^{j_2+1}] \times \cdots \times [c_n^{j_n}, c_n^{j_n+1}] \mid 0 \le j_i < k_i, 1 \le i \le n\} ,$$

kde $a_i = c_i^0 < c_i^1 < \cdots < c_i^{k_i - 1} < c_i^{k_i} = b_i$ jsou nějaká dělení intervalů $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Norma dělení je*

$$\lambda(D) := \max_{1 \le i \le n,\, 0 \le j < k_i} (c_i^{j+1} - c_i^j)$$

— maximální délka hrany podboxu. *Dělení $D$ boxu $I$ s body $\zeta$* je dvojice $(D, \zeta)$, kde $D$ je dělení boxu $I$ a $\zeta :\ D \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení splňující $\zeta(J) \in J$ pro každý podbox $J$. Prostě řečeno, v každém podboxu je zvolený nějaký bod.

**Riemannova definice vícerozměrného integrálu.** Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box, $(D, \zeta)$ je jeho dělení s body a $f :\ I \to \mathbb{R}$ je funkce. *Riemannova suma* je definována jako

$$S(f, D, \zeta) := \sum_{J \in D} |J| \cdot f(\zeta(J)) .$$

*Integrál funkce $f$ přes box $I$* je vlastní limita

$$\int_I f := \lim_{(D,\zeta),\, \lambda(D) \to 0} S(f, D, \zeta) ,$$

existuje-li, takže $\int_I f \in \mathbb{R}$ je takové číslo, že

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta > 0\, \forall (D, \zeta) :\ \lambda(D) < \delta \Rightarrow \left| \int_I f - S(f, D, \zeta) \right| < \varepsilon .$$

**Darbouxova definice vícerozměrného integrálu.** Nechť $D$ je dělení boxu $I$ a $f: I \to \mathbb{R}$ je funkce. Pak definujeme pro každý podbox $J$ tohoto dělení: $m(J) = \inf_{x\in J} f(x)$, $M(J) = \sup_{x\in J} f(x)$ a *dolní, resp. horní, součet*

$$s(f,D) := \sum_{J\in D} |J|\cdot m(J), \text{ resp. } S(f,D) := \sum_{J\in D} |J|\cdot M(J)\ .$$

*Dolní, resp. horní, integrál je*

$$\underline{\int_I} f = \sup(\{s(f,D) \mid D \text{ je dělení } I\})\ ,$$

resp.

$$\overline{\int_I} f = \inf(\{S(f,D) \mid D \text{ je dělení } I\})\ .$$

Opět (jako v jedné dimenzi) platí, že pro každé dělení $D$ boxu $I$ je

$$-\infty \le s(f,D) \le \underline{\int_I} f \le \overline{\int_I} f \le S(f,D) \le +\infty\ .$$

*Integrál funkce $f$ přes box $I$* pak definujeme jako reálné číslo

$$\int f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f \in \mathbb{R}\ ,$$

když se dolní a horní integrál rovnají společné vlastní hodnotě.

Platí: $f$ má $\int$ podle Riemannovy definice $\iff$ $f$ má $\int$ podle Darbouxovy definice, a v případě existence integrálu se obě hodnoty rovnají. Množinu funkcí riemannovsky integrovatelných přes box $I$ označíme jako

$$\mathcal{R}(I) = \{f \mid f \text{ má Riemannův integrál přes } I\}\ .$$

**Lebesgueova věta.** Řekneme, že množina $E \subset \mathbb{R}^n$ má ($n$-rozměrnou Lebesgueovu) míru 0, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje taková posloupnost boxů $I_1, I_2, \ldots$ v $\mathbb{R}^n$, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon \text{ a } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\ .$$

**Věta (Lebesgueova).** *Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box a $f: I \to \mathbb{R}$ je na něm definovaná fukce. Pak $f \in \mathcal{R}(I) \iff f$ je na $I$ omezená a množina jejích bodů nespojitosti má míru* 0.

Například každá omezená funkce $f:\ I \to \mathbb{R}$ nespojitá pouze ve spočetně mnoha bodech má Riemannův $\int_I f$. Z Lebesgueovy věty a definice integrálu dostáváme (dokažte si to jako úlohu 1):

**Důsledek.** *Když $f:\ I \to \mathbb{R}$ je funkce, jež je na boxu $I \subset \mathbb{R}^n$ nezáporná a $\int_I f = 0$, potom $f = 0$ na $I$ až na množinu bodů s mírou $0$.*

**Fubiniova věta.** (Přesněji, věta Fubiniova typu.) Umožňuje převést výpočet vícerozměrného integrálu na posloupnost obyčejných jednorozměrných integrálů. Nechť $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ a $Z = X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ je $m$-rozměrný, $n$-rozměrný a $(m+n)$-rozměrný box.

**Věta (Fubiniova).** *Nechť $f:\ Z = X \times Y \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(Z)$. Pak všechny tři integrály*

$$\int_Z f,\ \int_X \left( \int_Y f(x,y)\ dy \right) dx \quad a \quad \int_Y \left( \int_X f(x,y)\ dx \right) dy$$

*existují a rovnají se.*

Vysvětlíme značení a smysl věty. Integrál $\int_Z f$ existuje podle předpokladu o $f$. Definujeme funkci

$$F:\ X \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_Y f(x,y)\, dy\ ;$$

pokud pro nějaké $x = x_0 \in X$ tento integrál neexistuje, definujeme $F(x_0)$ jako libovolnou hodnotu z intervalu $[\underline{\int_Y} f(x_0,y)\ dy, \overline{\int_Y} f(x_0,y)\ dy]$. Podobným způsobem definujeme funkci

$$G:\ Y \to \mathbb{R},\ G(y) := \int_X f(x,y)\, dx\ .$$

Fubiniova věta říká, že $F \in \mathcal{R}(X)$, $G \in \mathcal{R}(Y)$ a $\int_Z f = \int_X F = \int_Y G$. Z důkazu též vyplyne (úloha 6), že množina bodů $x_0 \in X$ s $f(x_0,y) \notin \mathcal{R}(Y)$ má míru 0, a podobně v $y$-ové souřadnici.

*Důkaz.* Dokážeme, že $F \in \mathcal{R}(X)$ a $\int_Z f = \int_X F$, pro funkci $G$ je důkaz podobný. Každé dělení $D$ boxu $Z$ je „součinem“ $D_1 \times D_2$ dělení $D_1$ boxu $X$ a dělení $D_2$ boxu $Y$, to jest každý box $J \in D$ je součinem $J = J_1 \times J_2$

pro $J_1 \in D_1$, $J_2 \in D_2$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje dělení $D$ boxu $Z$, že $s(f, D) > \int_Z f - \varepsilon$. Vezmeme dělení $D_1$ a $D_2$, že $D$ „=“ $D_1 \times D_2$. Pak podle vlastností infima platí, že

$$\begin{aligned}
s(f,D) &= \sum_{J\in D} |J| \cdot \inf_{z\in J} f(z) = \sum_{J\in D} \overbrace{|J_1 \times J_2|}^{=|J_1|\cdot|J_2|} \cdot \inf_{x\in J_1, y\in J_2} f(x,y) \\
\text{(proč? — úloha 2)} &\le \sum_{J_1\in D_1} |J_1| \cdot \inf_{x\in J_1} \Bigg( \underbrace{\sum_{J_2\in D_2} |J_2| \inf_{y\in J_2} f(x,y)}_{=s(f(x,\cdot),D_2)\le \underline{\int_Y} f(x,y)\,dy \le F(x)} \Bigg) \\
&\le \sum_{J_1\in D_1} |J_1| \cdot \inf_{x\in J_1} F(x) = s(F, D_1)\ .
\end{aligned}$$

Takže $s(F, D_1) > \int_Z f - \varepsilon$. Analogicky se dokáže, že pro dané $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_1'$ boxu $X$, že $S(F, D_1') < \int_Z f + \varepsilon$. Pro $\varepsilon \to 0$ to podle Darbouxovy definice integrálu znamená, že $F \in \mathcal{R}(X)$ a $\int_X F = \int_Z f$. $\square$

**Příklad.** Nechť $f(x, y, z) = z \sin(x + y)$ a box $I \subset \mathbb{R}^3$ je dán intervaly $0 \le x \le \pi$, $|y| \le \pi/2$ a $0 \le z \le 1$. Pak, podle Fubiniovy věty,

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int\!\!\int_I f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \int_0^{\pi} z\sin(x+y)\,dx \right) dy \right) dz \\
&= \int_0^1 \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-z\cos(x+y)|_{x=0}^{\pi})\,dy \right) dz \\
&= \int_0^1 \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2z\cos y\,dy \right) dz \\
&= \int_0^1 (2z\sin y|_{y=-\pi/2}^{\pi})\,dz = \int_0^1 4z\,dz = 2\ .
\end{aligned}$$

**Integrál přes množinu $E \subset \mathbb{R}^n$.** Integrál rozšíříme z boxů na obecnější množiny. Zavedeme i objem množiny. Množina $E \subset \mathbb{R}^n$ je *přípustná*, když je omezená a její hranice $\partial E$ (což jsou ty body $x \in \mathbb{R}^n$, že každé okolí $x$ protíná jak $E$ tak $\mathbb{R}^n \backslash E$) má míru 0. Například krychle, otevřená či uzavřená koule jsou přípustné množiny, kdežto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]^n$ není přípustná množina. *Objem* omezené množiny $E \subset \mathbb{R}^n$ je integrál (když existuje)

$$\mathrm{vol}(E) := \int_I \chi_E\ ,$$

kde $I \subset \mathbb{R}^n$ je box obsahující $E$ a $\chi_E$ je charakteristická funkce množiny $E$ (takže $\chi_E(x) = 1$ pro $x \in E$ a $\chi_E(x) = 0$ pro $x \in I \backslash E$). Dá se dokázat:

**Tvrzení.** *$E \subset \mathbb{R}^n$ má objem $\iff$ $E$ je přípustná.*

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je omezená. *Integrál funkce $f : E \to \mathbb{R}$ přes $E$* definujeme jako

$$\int_E f := \int_I \overline{f} \ ,$$

kde $I \subset \mathbb{R}^n$ je box obsahující $E$ a $\overline{f}$ je rozšíření $f$:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \dots \quad x \in E \\ 0 & \dots \quad x \in I \backslash E \ . \end{cases}$$

Tato definice (jakož i definice objemu) je korektní: úloha 7.

## Úlohy

1. Dokažte důsledek Lebesgueovy věty.
2. Proč platí ta nerovnost v důkazu Fubiniovy věty?
3. Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box a $D$ je jeho dělení. Dokažte, že $|I| = \sum_{J \in D} |J|$.
4. Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box a $I = \bigcup_{i=1}^k J_i$ je sjednocení boxů, které mají disjunktní vnitřky. Dokažte, že $|I| = \sum_{i=1}^k |J_i|$.
5. Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je neomezená funkce definovaná na boxu v $\mathbb{R}^n$. Co se stane v Riemannově definici integrálu? Jak vypadají $\underline{\int_I} f$ a $\overline{\int_I} f$?
6. Zdůvodněte, proč ve Fubiniově větě množina
$$\{x_0 \in X \mid \int_Y f(x_0, y)\, dy \text{ neexistuje}\}$$
má míru nula.
7. Zdůvodněte, proč objem $\mathrm{vol}(E)$ a integrál $\int_E f$ pro množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ nezávisejí na volbě boxu $I$ obsahujícího $E$ (když existují).
8. Dokažte, že pro každý box $I \subset \mathbb{R}^n$ je $|I| = \mathrm{vol}(I)$.